

ORSAY
Série A,
N° d'ordre
761

T H E S E S

PRESENTEES

**AU CENTRE D'ORSAY
UNIVERSITE PARIS - SUD**

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Michel PROME

PREMIERE THESE

**EFFETS DE LA CHARGE D'ESPACE
DANS LES ACCELERATEURS LINEAIRES A PROTONS**

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 22 Avril 1971, devant la Commission d'Examen

MM. GRIVET

Président

**BERTEIN
LAPOSTOLLE
LEVY - MANDEL**

Examineurs

ORSAY
Série A,
N° d'ordre
761

T H E S E S

PRESENTEES

**AU CENTRE D'ORSAY
UNIVERSITE PARIS - SUD**

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Michel PROME

PREMIERE THESE

**EFFETS DE LA CHARGE D'ESPACE
DANS LES ACCELERATEURS LINEAIRES A PROTONS**

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 22 Avril 1971, devant la Commission d'Examen

MM. GRIVET

Président

**BERTEIN
LAPOSTOLLE
LEVY - MANDEL**

Examineurs

CHART
2000
100

1000

UNIVERSITE PARIS-SUD
900000

1000

LE CHARGE DE L'ACTIVITE EXPERIMENTALE

100

1000

1000

EFFETS DE LA CHARGE D'ETUDE
DANS LES ACCIDENTS LIAIES A TROUS

1000



1000

1000

1000

1000
1000
1000

EFFETS de la CHARGE d'ESPACE
dans les ACCELERATEURS LINEAIRES à PROTONS

EFFETS de la CHARGE d'ESPACE

dans les ACCELERATEURS LINEAIRES à PROTONS

TABLE des MATIERES

1ère PARTIE : LES EQUATIONS de la DYNAMIQUE

6

sans CHARGE d'ESPACE

I - RAPPELS sur les EQUATIONS de la DYNAMIQUE

I.1.	Introduction	7
I.2.	Les champs électromagnétiques	8
	I.2.1. Position du problème	8
	I.2.2. Expression analytique de la composante E_z	8
	I.2.3. Expression de E_r et B_ϕ	10
I.3.	Un jeu d'équations pour la dynamique	12
	I.3.1. Gain d'énergie	12
	I.3.2. L'équation sur la phase	15
	I.3.3. Effet radial d'un intervalle d'accélération	18
I.4.	Fil directeur pour l'étude de la foca- lisation	19
	I.4.1. Le paramètre Δ	19
	I.4.2. Le paramètre θ_0^2	22
	I.4.3. Le paramètre q	23
	I.4.4. Graphiques de stabilité radiale	25

II - NOUVELLES EQUATIONS de la DYNAMIQUE des PARTICULES

II.1.	Equations théoriques	27
II.2.	Equations pratiques	31
II.2.1.	Introduction des paramètres	31
II.2.2.	Calcul de r et r' connaissant r_1 et r_1'	34
II.2.3.	Calcul de r_2 et r_2' connaissant r_1 , r_1' , r et r'	37
II.2.4.	Calcul de ϕ	38
II.2.5.	Calcul de W	40
II.2.6.	Calcul de ϕ_2	41
II.2.7.	Calcul de W_2	42
II.2.8.	Théorème de Liouville	43
II.2.9.	Détermination de l'accélérateur	45
II.2.10.	Grandeurs mises en mémoires rapides de l'ordinateur	48

2ème PARTIE : LA CHARGE d'ESPACE

51

I - TRAITEMENT de la CHARGE d'ESPACE

I.1.	Introduction	52
I.1.1.	Intérêt d'une telle étude	52
I.1.2.	Situation de cette étude	53
I.1.3.	Remarques préliminaires	54
I.1.4.	Relation entre les forces et les variations d'énergie et d'angles	56
I.1.5.	Relation entre les forces et les charges	58

I.2.	Les diverses méthodes de calcul de la charge d'espace	60
I.2.1.	Remarques sur les méthodes de calcul	60
I.2.2.	Méthode des cases	62
I.2.3.	Méthode de la distribution continue équivalente	62
I.3.	Le tronc commun des programmes	64
I.3.1.	Le bloc CORD	64
I.3.2.	Le remplissage initial	66
I.3.3.	Sortie des résultats	67
I.4.	MAPRO2	70
I.4.1.	MAPRO1 et MAPRO2	70
I.4.2.	Présentation générale de MAPRO2	70
I.4.3.	Distribution équivalente	71
I.4.4.	Expression des forces de charge d'espace	74
I.4.5.	Calcul numérique des forces de charge d'espace	76

II - RESULTATS

II.1.	Introduction	79
II.2.	Premiers résultats	80
II.2.1.	Adaptation	80
II.2.2.	Augmentation de l'émittance radiale	83
II.2.3.	Influence de l'émittance longitudinale	84
II.3.	Les rouages de la charge d'espace	85
II.3.1.	Evolution de E_r et E_l	85
II.3.2.	Vitesses moyennes	87
II.3.3.	Hyperémittances	90
II.3.4.	Loi d'évolution de l'hyperémittance	92

II.4.	Conclusion	98
-------	------------	----

ANNEXE : EMITTANCES

100

I	Les invariants	100
---	----------------	-----

II	Définition des émittances	104
----	---------------------------	-----

II.1.	Introduction	104
-------	--------------	-----

II.2.	Définition de l'émit- tance radiale	105
-------	--	-----

II.3.	Exemples d'émittances pour quelques distri- butions	111
-------	---	-----

II.4.	Définition de l'émit- tance longitudinale	115
-------	--	-----

III	Les émittances dans MAPRO2	116
-----	----------------------------	-----

III.1.	Emittances	116
--------	------------	-----

III.2.	Dimensions moyennes, vitesses moyennes	118
--------	---	-----

III.3.	Emittance pour la dis- tribution pratique	120
--------	--	-----

REMERCIEMENTS	123
---------------	-----

BIBLIOGRAPHIE	124
---------------	-----

PRESENTATION des FIGURES	131
--------------------------	-----

PROGRAMME MAPRO2	
------------------	--

ANNEXE : EMBELLISSEMENTS

PREMIERE PARTIE

LES EQUATIONS de la DYNAMIQUE
sans CHARGE D'ESPACE

I - RAPPELS sur les EQUATIONS de la DYNAMIQUE

I.1. INTRODUCTION

La première question qui se pose lorsqu'on cherche soit à construire un accélérateur linéaire à protons, soit à simuler des expériences sur un accélérateur existant, c'est de trouver un groupe d'équations qui décrive aussi précisément que possible le mouvement des protons dans l'accélérateur. Ainsi donc, lorsqu'il s'est agi de déterminer les paramètres électriques de l'actuel injecteur de Saturne [41], on utilisait un certain groupe d'équations, qui reflète un certain état de la technique à un certain moment ; cet état dépend d'une part de la connaissance des champs électromagnétiques traversés par les particules, et d'autre part de l'habileté avec laquelle l'effet de ces champs est intégrée aux équations de la dynamique. La connaissance des champs électromagnétiques suppose la résolution des équations de Maxwell dans la cavité électromagnétique qu'est l'accélérateur linéaire, et s'est beaucoup raffinée depuis les premiers calculs, en particulier grâce à l'emploi d'ordinateurs de plus en plus puissants.

Sans vouloir faire un historique de ces questions, il a paru utile dans le cadre de cette étude, de rappeler certaines étapes ; elles seront l'occasion d'une part de remettre en lumière des théories très simples qui restent un guide dans l'exploitation de théories plus évoluées, et d'autre part de signaler certains écueils rencontrés lorsqu'on cherche à rendre compte d'effets de plus en plus fins.

I.2. Les CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES

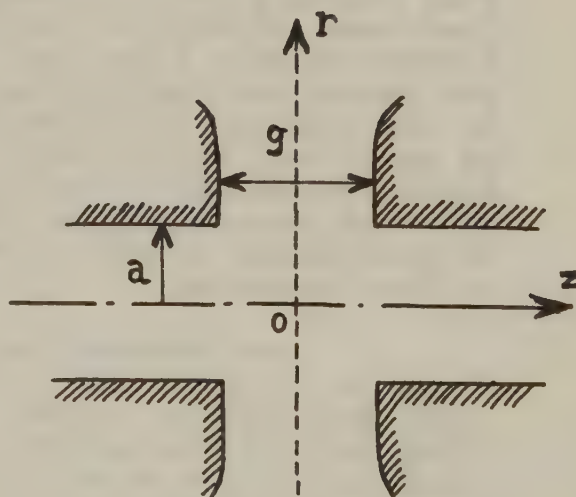
I.2.1. Position du problème

Le problème des champs électromagnétiques ne fut vraiment résolu que lorsqu'on eut à sa disposition des programmes de résolution numérique des équations de Maxwell tels que MESSYMESH [42], IDDA [4], ou CLAS [5]. Ces programmes donnent les composantes des champs en tout point d'un maillage à l'intérieur de la cavité; il est d'ailleurs à remarquer que le stockage de ces champs en vue de leur utilisation dans les programmes de dynamique n'est pas la meilleure façon de faire, et qu'il vaut beaucoup mieux introduire des grandeurs intégrales de ces champs sur l'espace d'interaction champ-faisceau, ainsi qu'il sera expliqué au chapitre II.

Quoi qu'il en soit, pendant longtemps les cavités des accélérateurs linéaires à protons furent déterminées à partir de mesures sur des maquettes, et les champs furent connus par des expressions analytiques résultant de développements en séries à partir d'approximations faites sur les conditions aux limites dans l'intervalle d'accélération.

I.2.2. Expression analytique de la composante E_z

Nous allons montrer comment on peut trouver une expression analytique de la composante longitudinale E_z du champ électrique dans l'intervalle d'accélération de longueur g , en supposant le champ uniforme entre les tubes de glissement, en dehors du trou de passage du faisceau de rayon a . On néglige en ceci l'arrondi que l'on donne en réalité au bord interne des tubes de glissement; dans la pratique, on obtiendra de meilleures valeurs en majorant g ou a , ou les deux. De cette expression, nous déduirons le gain d'énergie, ce qui introduira l'importante notion de facteur de temps de transit.



Nous partirons des équations de Maxwell, qui impliquent :

$$\Delta E_z + \frac{\omega^2}{c^2} E_z = 0$$

où ω est la pulsation H.F.

Ceci s'écrit en coordonnées cylindriques pour des champs de révolution :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z = 0$$

Ensuite, nous ferons une décomposition de E_z en série de Fourier suivant z .

$$E_z(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r, k) \cos kz \, dk$$

En remplaçant dans l'équation du champ E_z par l'expression ci-dessus, il vient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(r, k) \cos kz \, dk = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f(r, k) \cos kz \, dk = 0$$

Cette équation doit être une identité en r , donc :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f(r, k) = 0$$

dont la solution est :

$$f(r, k) = A(k) I_0(\gamma r)$$

$$\text{où } \begin{cases} A(k) \text{ est une fonction arbitraire} \\ I_0 \text{ est la fonction de Bessel} \\ \text{modifiée de rang zéro} \\ \gamma = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \end{cases}$$

donc :

$$E_z(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) I_0(\gamma r) \cos kz \, dk$$

A(k) s'obtient par la formule d'inversion de Fourier :

$$I_0(\gamma r) A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(r, z) \cos kz \, dz$$

Notre hypothèse de calcul est que $E_z(a, z) = E$ constant dans l'intervalle d'accélération $-\frac{q}{2} < z < \frac{q}{2}$ et nul en dehors. Il s'ensuit que :

$$I_0(\gamma r) A(k) = \frac{Eq}{2\pi} \frac{\sin \frac{kq}{2}}{\frac{kq}{2}}$$

et, en définitive :

$$E_z(r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Eq}{2\pi} \frac{\sin \frac{kq}{2}}{\frac{kq}{2}} \frac{I_0(\gamma r)}{I_0(\gamma a)} \cos kz \, dk$$

I.2.3. Expressions de E_r et B_ϕ

On trouve facilement l'expression de E_r en partant de :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

qui s'écrit ici :

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Rappelons deux propriétés des fonctions de Bessel :

$$\begin{cases} 2 I'_\nu (x) = I_{\nu+1} (x) + I_{\nu-1} (x) \\ 2 \frac{\nu}{x} I_\nu (x) = I_{\nu-1} (x) - I_{\nu+1} (x) \end{cases}$$

La combinaison somme de ces deux relations, pour $\nu = 1$, écrite avec l'argument γr , est :

$$\frac{1}{\gamma} \left[\frac{I_1 (\gamma r)}{r} + \frac{d I_1 (\gamma r)}{dr} \right] = I_0 (\gamma r)$$

On vérifie alors sans peine que :

$$E_r (r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_g}{2\pi} \frac{k}{\gamma} \frac{\sin \frac{kg}{2}}{\frac{kg}{2}} \frac{I_1 (\gamma r)}{I_0 (\gamma a)} \sin kz \, dk$$

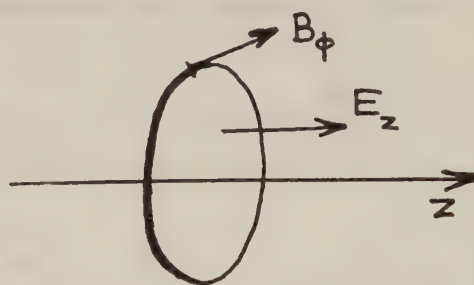
est l'expression correcte de E_r .

Quant à B_ϕ , dernière composante non nulle des champs, on tire son expression de :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

en intégrant sur un disque d'axe z :

$$2 \pi r B_\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r 2 \pi r E_z (r, z) \, dr$$



Rappelons encore une propriété des fonctions de Bessel :

$$\int_0^x x I_{\nu-1} (x) \, dx = x^\nu I_\nu (x)$$

pour $\nu = 1$, et avec l'argument γr , cette relation devient :

$$\int_0^r r I_0 (\gamma r) \, dr = \frac{r}{\gamma} I_1 (\gamma r)$$

et on voit sans peine que l'expression de B_ϕ est :

$$B_\phi = \frac{\omega}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Eg}{2\pi} \frac{\sin \frac{kg}{2}}{\frac{kg}{2}} \frac{1}{\gamma} \frac{I_1(\gamma r)}{I_0(\gamma a)} \cos kz \, dk$$

où l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ a été remplacé par ω , puisqu'on ne s'intéresse ici qu'aux valeurs crête des champs, étant entendu que les composantes électriques et magnétiques sont en quadrature, comme il se doit dans une cavité électromagnétique.

I.3. Un JEU d'EQUATIONS pour la DYNAMIQUE

I.3.1. Gain d'énergie

Nous noterons par ΔW ce gain d'énergie, et par v_0 la vitesse moyenne d'une particule traversant l'intervalle d'accélération. (En toute rigueur, on devrait faire le calcul en prenant, au lieu de v_0 , la vitesse vraie, qui varie pendant la traversée de l'intervalle d'accélération).

$$\frac{\Delta W}{e} = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} E_z(r, z) \cos \left[\frac{\omega z}{v_0} - \phi \right] dz$$

$$\frac{\Delta W}{e} = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Eg}{2\pi} \frac{\sin \frac{kg}{2}}{\frac{kg}{2}} \frac{I_0(\gamma r)}{I_0(\gamma a)} \cos kz \cos \left[\frac{\omega z}{v_0} - \phi \right] dk$$

Pour alléger l'écriture, posons :

$$h(k) = \frac{Eg}{2\pi} \frac{\sin \frac{kg}{2}}{\frac{kg}{2}} \frac{I_0(\gamma r)}{I_0(\gamma a)}$$

$$\frac{\Delta W}{e} = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} dz \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) \cos kz \cos \left[\frac{\omega z}{v_0} - \phi \right] dk$$

$$\frac{\Delta W}{e} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\ell}^{+\ell} dz \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) \frac{1}{2} \left[\cos \left(kz + \frac{\omega z}{v_0} - \phi \right) + \cos \left(kz - \frac{\omega z}{v_0} + \phi \right) \right] dk$$

h est une fonction paire en k , donc les deux cosinus apportent une contribution égale, et :

$$\frac{\Delta W}{e} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\ell}^{+\ell} dz \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) \cos \left(kz - \frac{\omega z}{v_0} + \phi \right) dk$$

$$\frac{\Delta W}{e} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\ell}^{+\ell} dz \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$h(k) \left[\cos \left(k - \frac{\omega}{v_0} \right) z \cos \phi - \sin \left(k - \frac{\omega}{v_0} \right) z \sin \phi \right] dk$$

$\sin \left(k - \frac{\omega}{v_0} \right) z$ est une fonction impaire de z et apporte une contribution nulle ; donc :

$$\frac{\Delta W}{e} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_{-\ell}^{+\ell} dz \int_{-\infty}^{+\infty} h(k) \cos \phi \cos \left(k - \frac{\omega}{v_0} \right) z dk$$

On reconnaît là une forme de l'intégrale de Fourier :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau$$

d'où :

$$\frac{\Delta W}{e} = E g \frac{\sin k_o \frac{g}{2}}{k_o \frac{g}{2}} \frac{I_o (\gamma_o r)}{I_o (\gamma_o a)} \cos \phi$$

où :

$$k_o = \frac{\omega}{v_o}$$

$$\gamma_o^2 = k_o^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

λ est la longueur d'onde, et $\beta_o = \frac{v_o}{c}$

$$\frac{\Delta W}{e} = E g \frac{\sin \frac{\pi g}{\beta_o \lambda}}{\frac{\pi g}{\beta_o \lambda}} \frac{I_o (\gamma_o r)}{I_o (\gamma_o a)} \cos \phi$$

Appelons facteur de temps de transit la quantité :

$$T = \frac{\sin \frac{\pi g}{\beta_o \lambda}}{\frac{\pi g}{\beta_o \lambda}} \frac{I_o (\gamma_o r)}{I_o (\gamma_o a)}$$

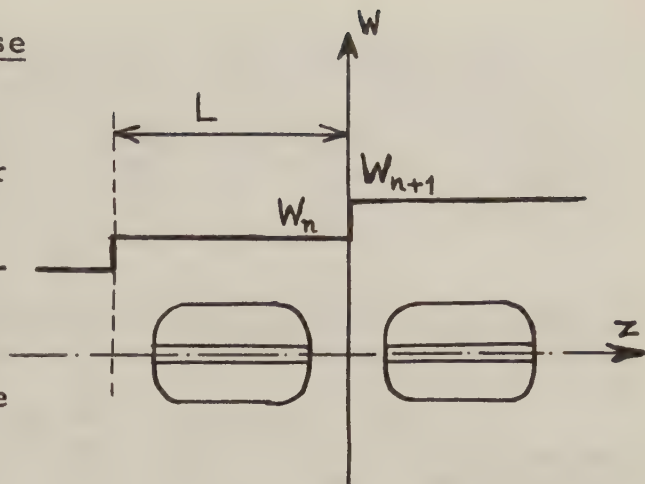
Faisons apparaître le champ moyen $\bar{E}$ dans l'accélérateur, L étant la longueur de la cellule :

$$\Delta W = e \bar{E} L T \cos \phi$$

On remarque que le gain d'énergie dépend de la phase ϕ à laquelle la particule se présente dans l'intervalle d'accélération, mais aussi de la vitesse de la particule, puisque T en dépend.

I.3.2. L'équation sur la phase

Puisque nous avons calculé l'effet global d'un intervalle d'accélération sur l'énergie, adoptons donc le modèle suivant : remplaçons le véritable intervalle d'accélération par un autre, infiniment mince, situé au milieu du véritable. Désignons par n et $n + 1$ les numéros de 2 cellules consécutives.



$$W_{n+1} = W_n + \Delta W$$

Comme les particules glissent sur la longueur L entre deux intervalles d'accélération, on semble en droit d'écrire :

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi \left(\frac{L}{\beta\lambda} - 1 \right)$$

Ce qui revient à dire qu'il ne se passe rien de spécial à la traversée de l'intervalle d'accélération.

Nous allons voir qu'il y a dans cette équation une approximation, et que si on la prend telle quelle, pour être cohérent il faut lui associer une équation sur le gain d'énergie où le facteur de temps de transit est constant. C'est le même ordre d'approximation.

Sinon, si nous prenons :

$$W_{n+1} = W_n + e \bar{E} L T \cos \phi$$

avec T dépendant de la vitesse (donc de l'énergie), les variables W et ϕ ne sont plus conjuguées, le théorème de Liouville ne s'applique plus, et on assiste à une augmentation de la surface de phase en ϕ , ΔW qui peut atteindre 70 % entre 750 keV et 20 MeV (cf [41], page 43). Or, nous l'avons vu au § précédent, il est logique de faire dépendre T de la vitesse ; recherchons donc une équation d'évolution de la phase qui conserve la conjugaison de W et ϕ . En fait, puisque nous adoptons ici le formalisme des transformations finies, nous chercherons à avoir un Jacobien égal à 1. S'astreindre à un Jacobien unité revient à conserver invariante la surface de phase.

Soit donc :

$$\begin{cases} W_{n+1} = W_n + 1 (W_n, \phi_n) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 1 (W_n, \phi_n) \end{cases}$$

les équations de transformation de W et ϕ au passage de l'intervalle d'accélération infiniment mince.

Nous conduirons les calculs au premier ordre par rapport au gain d'énergie dans l'intervalle d'accélération supposé petit devant l'énergie. A ce degré d'approximation, l'énergie rentrant dans le calcul de T est W_n . Appelons

$f(W_n, \phi_n)$ la fonction que nous cherchons.

$$\begin{cases} W_{n+1} = W_n + e \bar{E} L T(W_n) \cos \phi_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + f(W_n, \phi_n) \end{cases}$$

écrivons maintenant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W_{n+1}}{\partial W_n} & \frac{\partial W_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial W_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{vmatrix} = 1$$

$$\left(1 + e \bar{E} L \frac{dT}{dW} \cos \phi_n\right) \left(1 + \frac{\partial f}{\partial \phi_n}\right) + \frac{\partial f}{\partial W_n} e \bar{E} L T \sin \phi_n = 1$$

On remarque que la fonction :

$$f = - e \bar{E} L \sin \phi_n \frac{dT}{dW} + k$$

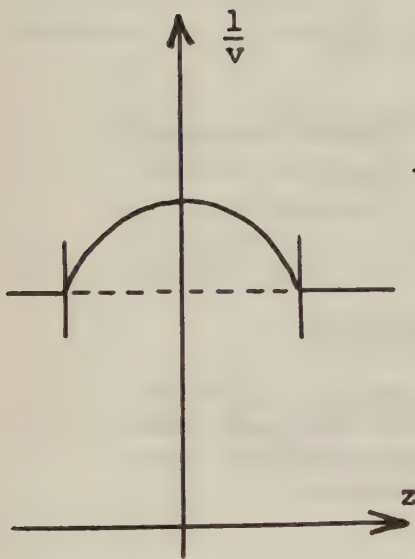
satisfait cette équation au premier ordre.

Avec notre modèle de l'intervalle d'accélération infiniment mince, on doit donc admettre que la phase subit une discontinuité au centre de l'intervalle. Une autre façon de dire la même chose est de dire qu'à ce degré d'approximation, du point de vue du calcul du temps que met une particule pour aller d'un centre d'intervalle d'accélération au suivant, on ne peut pas admettre qu'elle se déplace à vitesse constante.

On peut expliquer ceci simplement, en invoquant le fait que dans un intervalle d'accélération, la particule est en général peu accélérée pendant la première partie de sa traversée, et beaucoup plus ensuite ; il s'ensuit une différence entre le temps de traversée réel τ_r , et le temps approximé τ_a que l'on calculerait en négligeant le terme f dans l'équation en ϕ .

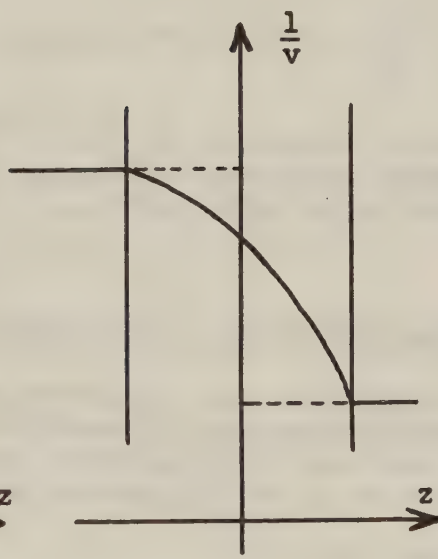
Raisonnons en temps de traversée du gap, τ :

$$\tau = \int_{\text{intervalle}} \frac{dz}{v}$$



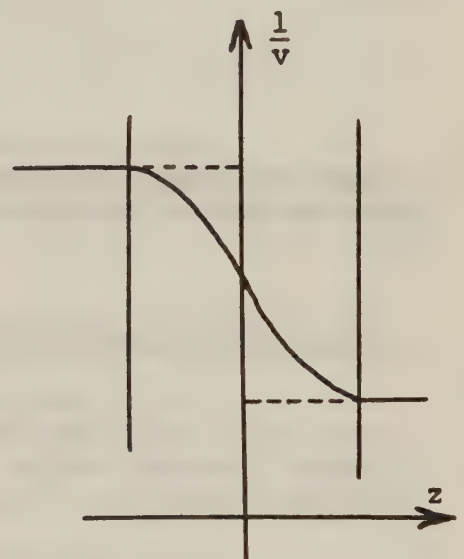
$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\tau_r > \tau_h$$



$$-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$$

$$\tau_r > \tau_h$$



$$\phi = 0$$

$$\tau_r \approx \tau_h$$

Ces graphiques montrent que le terme

$$(- e \bar{E} L \sin \phi \frac{dT}{dW} + K)$$

doit être nul pour $\phi = 0$, donc $K = 0$.

D'autre part, il doit être > 0 pour $-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$, ce qui est bien le cas.

De plus, en dehors de l'intervalle d'accélération W reste constant dans notre modèle, et rien ne s'oppose à la réintégration du terme habituel

$$2 \pi \left(\frac{L}{\beta \lambda} - 1 \right)$$

En définitive, l'équation régissant la phase s'écrit :

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2 \pi \left(\frac{L}{\beta \lambda} - 1 \right) - e \bar{E} L \sin \phi \frac{dT}{dW}$$

Nous verrons au chapitre II que le terme correctif ainsi calculé s'introduit tout naturellement dans le cadre des nouvelles équations de la dynamique.

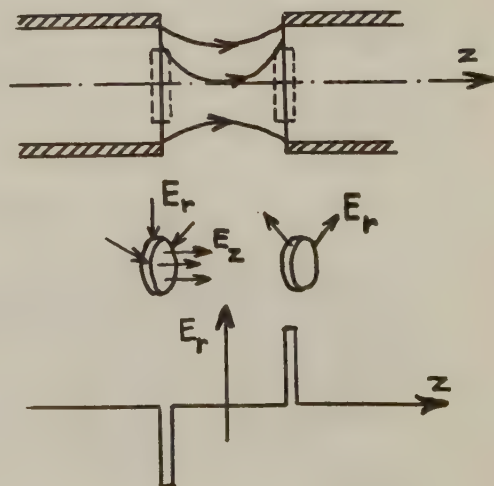
1.3.3. Effet radial d'un intervalle d'accélération

De la même façon que les transformations portant sur W et ϕ sont des transformations discrètes, on peut remplacer l'effet radial par une ou plusieurs percussions appliquées aux particules en un ou plusieurs points.

E_r a une structure de doublet, ainsi qu'on peut s'en convaincre simplement en appliquant la relation :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

aux deux petites galettes minces ci-contre.



A partir de cette constatation, on peut chercher à représenter l'effort radial par une percussion unique appliquée au centre de l'intervalle d'accélération, mais alors on doit accompagner cette percussion d'un déplacement [43], ou par deux percussions agissant aux extrémités de l'intervalle d'accélération [41].

B_ϕ pour sa part, agit plutôt au centre de l'intervalle, et son effet ne se fait sentir qu'à haute énergie ; de ce fait, il est difficile de trouver un modèle général satisfaisant. C'est là en particulier qu'apparaît l'avantage des équations mises en oeuvre au chapitre suivant ; toutefois, avant de quitter ce sujet, il paraît utile de rappeler des principes simples, qui permettent une vue d'ensemble de la focalisation dans un accélérateur linéaire à protons.

I.4. FIL DIRECTEUR pour l'ETUDE de la FOCALISATION

I.4.1. Le paramètre Δ

Nous assimilerons ici l'effet radial de l'intervalle d'accélération à une lentille mince située en son milieu. Le traitement ci-dessous est inspiré des articles cités en références [44], [45], [46].

Evaluation de E_r en fonction de E_z :

Ecrivons $\text{div } \vec{E} = 0$ avec $E_\phi = 0$

$$\frac{E_z}{z} + \frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} = 0$$

$$E_r(r, z) = r \frac{\partial E_r}{\partial r}$$

d'où :

$$E_r = - \frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Evaluation de la déviation d'une trajectoire :

Le mouvement radial est régi par l'équation :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{er}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$mv^2 \frac{d^2 r}{dz^2} = - \frac{er}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

E_0 désignant le champ crête longitudinal sur l'axe dans l'intervalle d'accélération,

$$E_0 = \frac{E}{I_0 (\gamma_0 a)}$$

et v étant la vitesse de la particule synchrone, nous utilisons la relation de base des accélérateurs de type Alvarez :

$$v = f L$$

Intégrons une fois l'équation du mouvement :

$$\frac{1}{r} \delta \left(\frac{dr}{dz} \right) = - \frac{e}{m} \frac{1}{2 L^2 f^2} [E_z (z \text{ entrée}) - E_z (z \text{ sortie})]$$

$$\text{Or : } \begin{cases} E_z (z \text{ entrée}) = E_0 \cos \left(\phi - \frac{\pi q}{L} \right) \\ E_z (z \text{ sortie}) = E_0 \cos \left(\phi + \frac{\pi q}{L} \right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{r} \delta \left(\frac{dr}{dz} \right) = - \frac{e}{m} \frac{E_0}{L^2 f^2} \sin \phi \sin \frac{\pi q}{L}$$

Nous sommes alors en droit d'écrire, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dz} \end{pmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{e}{m} \frac{E_0}{L^2 f^2} \sin \phi \sin \frac{\pi q}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dz} \end{pmatrix}_1$$

On aurait une écriture similaire avec la variable y .

Nous allons maintenant changer d'unité de longueur de l'axe, et poser :

$$z = Z L$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ \frac{dx}{dz} \end{Bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ \frac{v}{f} & \frac{e}{m} & \frac{E_0}{L^2 f^2} \sin \phi \sin \frac{\pi q}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \frac{dx}{dz} \end{Bmatrix}_1$$

On fait ainsi apparaître une quantité sans dimensions Δ

$$\Delta = \frac{e v E_0 (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{L^2 f^3 m_0} \sin \phi \sin \frac{\pi q}{L}$$

car

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

et la matrice de transfert de l'intervalle d'accélération s'écrit :

$$M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Delta & 1 \end{bmatrix}$$

Un traitement tenant compte de B_ϕ (cf [47], page 282) conduit à multiplier par $(1 - \beta^2)$ cette expression de Δ ; nous prendrons donc :

$$\Delta = \frac{e v E_0 (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{L^2 f^3 m_0} \sin \phi \sin \frac{\pi q}{L}$$

I.4.2. Le paramètre θ_0^2

Les matrices de transfert d'un quadrupole sont du type :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha L_q & \frac{1}{\alpha} \sin \alpha L_q \\ -\alpha \sin \alpha L_q & \cos \alpha L_q \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \text{ch } \alpha L_q & \frac{1}{\alpha} \text{sh } \alpha L_q \\ \alpha \text{sh } \alpha L_q & \text{ch } \alpha L_q \end{bmatrix}$$

$$\text{où} : \begin{cases} \alpha^2 = \frac{e}{mv} \frac{\partial B_r}{\partial r} \\ \frac{\partial B_r}{\partial r} : \text{gradient du quadrupole} \\ L_q : \text{longueur magnétique équivalente du quadrupole} \end{cases}$$

Ces matrices sont valables avec la coordonnée z ; nous leur préférons ici les matrices suivantes, valables avec la coordonnée Z :

$$M_+ = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{\sin \theta}{\theta_0} \\ -\theta_0 \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad M_- = \begin{bmatrix} \text{ch } \theta & \frac{\text{sh } \theta}{\theta_0} \\ \theta_0 \text{sh } \theta & \text{ch } \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \theta = \alpha L_q \\ \theta_0 = \alpha L \end{cases} \quad \theta_0^2 = \frac{e}{mv} \frac{\partial B_r}{\partial r} L^2$$

On se réfère souvent à des diagrammes établis pour $L = 2 L_q$ (cf page 26) ; dans la pratique, en général $L \neq 2 L_q$, et il vaut mieux alors définir θ_0^2 par :

$$\theta_0^2 = \frac{2e}{mv} \frac{\partial B_r}{\partial r} L L_q$$

C'est ce qui est fait dans les programmes présentés dans la deuxième partie.

I.4.3. Le paramètre q

Le paramètre q caractérise les résonances entre mouvement longitudinal et mouvement radial :

$$q = \frac{\Omega_r}{\Omega_z}$$

$$\begin{cases} \Omega_r & : \text{ pulsation de l'oscillation radiale} \\ \Omega_z & : \text{ pulsation de l'oscillation longitudinale} \end{cases}$$

On montre que :

$$\Omega_z^2 = (1 - \beta_s^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2 \pi e \bar{E}_0 \sin(-\phi_s)}{m_0 \lambda \beta_s} \frac{\sin \frac{\pi q}{L}}{\frac{\pi q}{L}}$$

$$\begin{cases} \text{l'indice s indique une quantité synchrone} \\ \bar{E}_0 : \text{ champ moyen crête sur l'axe} \\ \bar{E}_0 = E_0 \frac{q}{L} \end{cases}$$

Nous appellerons μ la progression de la phase de l'oscillation radiale par maille et N le nombre de paires de quadrupoles par maille.

(N = 1 correspond à la focalisation du type +--+ , où on change la polarité des quadrupoles d'un tube de glissement au suivant.

N = 2 correspond à la focalisation du type +++- , où on change la polarité des quadrupoles tous les deux tubes, etc...).

Ω_z^2 peut être relié facilement à Δ :

$$\frac{\Omega_z^2}{\Delta} = (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2 \pi e \bar{E}_0 \sin(-\phi_s)}{m_0 \lambda \beta_s}$$

$$\frac{\sin \frac{\pi q}{L}}{\frac{\pi q}{L}} \frac{L^2 f^3 m_0}{\sin \phi v e E_0 (1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}} \sin \frac{\pi q}{L}}$$

$$\frac{\Omega_z^2}{\Delta} = - \frac{2 L^2 f^3}{\lambda \beta_s v}$$

Faisons apparaître T, période H.F. :

$$\begin{cases} L = \beta_s \lambda \\ v = \beta_s c \end{cases}$$

$$\frac{\Omega_z^2}{\Delta} = - \frac{2}{T^2}$$

or :

$$\Omega_r = \frac{\mu}{2 NT}$$

d'où une relation entre μ , q et Δ_s .

$$\mu = 2 N q \sqrt{-2 \Delta_s}$$

$$\begin{cases} \text{pour une focalisation du type } +--+ & \mu = 2 q \sqrt{-2 \Delta_s} \\ \text{pour une focalisation du type } ++-- & \mu = 4 q \sqrt{-2 \Delta_s} \end{cases}$$

Remarquons que $\Delta_s < 0$, puisque les angles de phase stable sont < 0 .

I.4.4. Graphiques de stabilité radiale

Nous définirons une matrice globale de maille M ; c'est la matrice de transfert des matrices colonne vues plus haut sur une maille, la maille étant le plus petit élément répétitif du système de focalisation.

La matrice globale de maille s'obtient par produit des matrices de transfert des divers éléments de la maille ; dans la maille on trouve, en plus des quadrupoles décrits par les matrices M_+ et M_- , les intervalles d'accélération, décrits par M_g , et des espaces sans champ décrits par M_o .

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\ell}{L} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où ℓ est la longueur de l'espace sans champ.

En désignant par H :

$$H = \frac{L}{g}$$

$$\frac{\ell}{L} = \frac{1 - H}{2}$$

$$\theta = H \theta_o$$

Cas +--+ :

$$M = M_o M_+ M_o M_g M_o M_- M_o M_g$$

Cas ++-- :

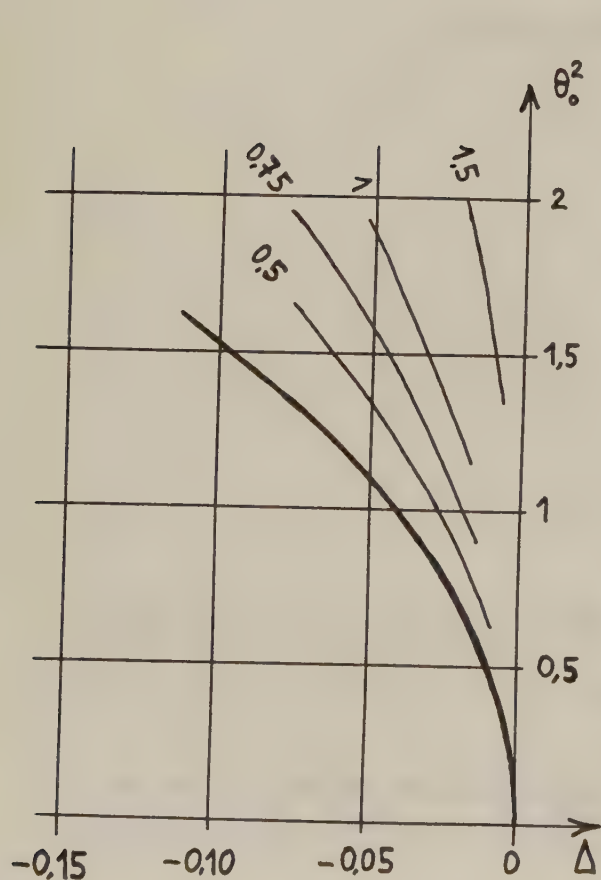
$$M = M_o M_+ M_o M_g M_o M_- M_o M_g M_o M_- M_o M_g M_o M_+ M_o M_g$$

La matrice M dépend naturellement du point de départ de la maille, mais la trace de cette matrice en est indépendante.

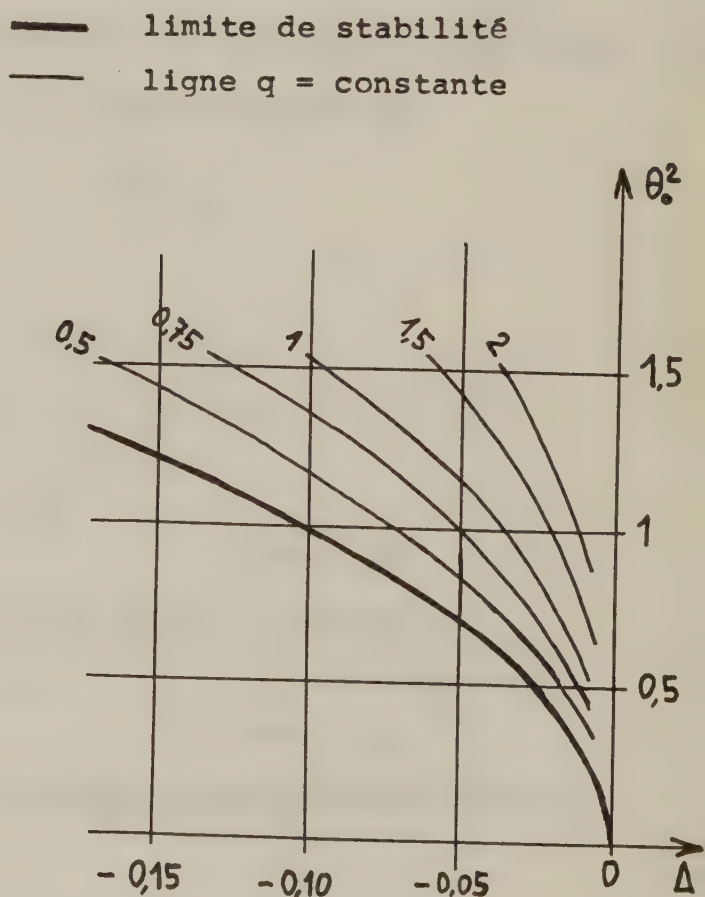
On montre (voir par exemple la référence [48]), que :

$$\text{trace } M = 2 \cos \mu$$

On peut donc, avec ce formalisme, tracer des graphiques en axes θ_0^2 , Δ , sur lesquels sont portées les limites de stabilité ($-2 < \text{trace } M < +2$), les lignes $q = \text{constante}$; ces graphiques permettent une analyse rapide de la focalisation radiale ; ils constituent une aide précieuse, même lorsqu'on utilise de puissants programmes de calcul automatique de trajectoires ; dans les programmes présentés dans la deuxième partie, θ_0^2 et Δ sont calculés lors des calculs préliminaires, et sont disponibles pour tout contrôle ultérieur.



Mode +--+
(H = 0,5)



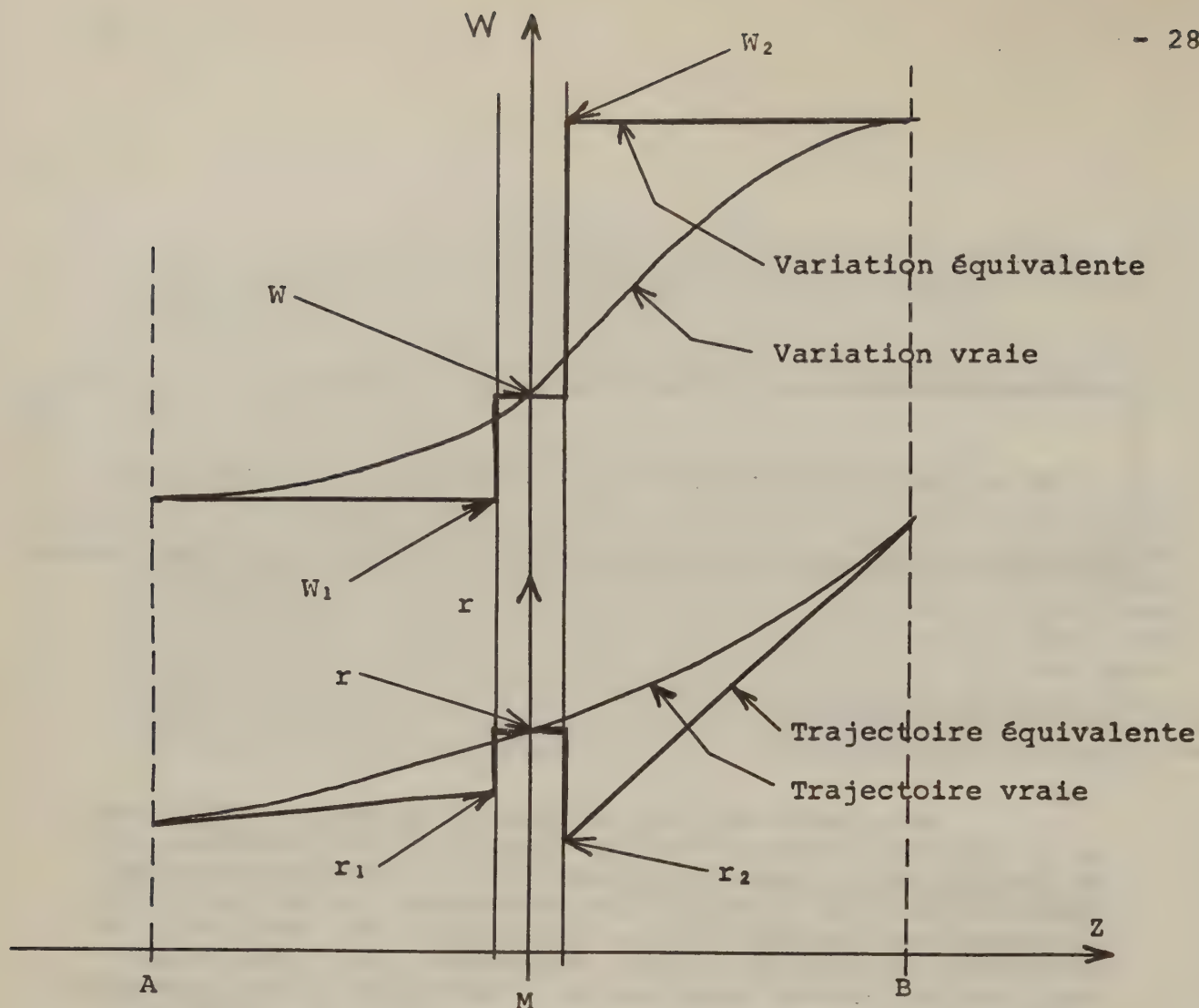
Mode ++--
(H = 0,5)

II - NOUVELLES EQUATIONS de la DYNAMIQUE des PARTICULES

II.1. EQUATIONS THEORIQUES

Au moment où l'on se proposa d'inclure les effets de la charge d'espace dans les calculs de trajectoires, il se trouva que de nouvelles équations de dynamique étaient disponibles. Ces équations qui concernent le traitement de l'intervalle d'accélération, sont dues à MM. LAPOSTOLLE et SCHNITZER [1],[2],[3] ; elles présentent, par rapport aux équations utilisées jusqu'alors, l'avantage d'être rigoureuses ; grâce à certains paramètres, qui sont des grandeurs intégrales des champs dans l'intervalle d'accélération, on évite l'écueil d'avoir à remplacer l'effet radial vrai, qui est réparti, par des effets impulsionsnels approximativement équivalents appliqués à des endroits plus ou moins arbitraires.

Le transfert des coordonnées de phase d'une particule à travers un espace de glissement ou un quadropôle, reste fait de façon conventionnelle ; par contre, dans un intervalle d'accélération, on substitue à la trajectoire vraie une trajectoire équivalente (voir figure ci-après) où les changements des positions et des vitesses sont pour ainsi dire séparés. Dans la trajectoire équivalente, la particule glisse (à vitesse constante) de la sortie d'un quadropôle jusqu'au plan milieu de l'intervalle d'accélération, subit un changement impulsionsnel de vitesse, et glisse à nouveau jusqu'à l'entrée du quadropôle suivant.



AB : intervalle d'accélération
M : centre de l'intervalle

Les deux trajectoires, la vraie et l'équivalente, coïncident aux extrémités de l'intervalle d'accélération, et en son plan milieu ; entre ces plans, la position des particules est inconnue, ce qui n'a aucune importance ici, puisqu'on n'a besoin des coordonnées des particules qu'en certaines sections de l'accélérateur.

Les formules procèdent en deux étapes ; un premier jeu d'équations donne la variation équivalente des coordonnées sur tout l'intervalle d'accélération, en supposant connues les coordonnées au centre de l'intervalle ; un deuxième jeu permet de connaître en effet ces dernières, fournissant la variation équivalente des coordonnées dans la première moitié de l'intervalle.

Ces équations existent sous forme relativiste, mais nous ne rappellerons que leur forme non relativiste, la seule qui nous intéresse ici.

$$W_2 - W_1 = e V_0 T_0 I_0 \cos \phi + e V_0 \frac{d}{dk} (T_0 k I_1) r' \sin \phi$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \alpha k \frac{d}{dk} (T_0 I_0) \sin \phi - \alpha k \frac{d^2}{dk^2} (T_0 k I_1) r' \cos \phi$$

$$r'_2 - r'_1 = -\alpha T_0 I_1 \sin \phi + \alpha \left[\frac{d}{dk} (T_0 k I'_1) - T_0 I_0 \right] r' \cos \phi$$

$$r_2 - r_1 = -\alpha \frac{d}{dk} (T_0 I_1) \cos \phi - \alpha \left[\frac{d^2}{dk^2} (T_0 k I'_1) - \frac{d}{dk} (T_0 I_0) \right] r' \sin \phi$$

$$W - W_1 = \frac{W_2 - W_1}{2} + \frac{e V_0}{2} \left[S_\ell \sin \phi - \frac{d}{dk} \frac{\partial S_\ell}{\partial r} r' \cos \phi \right]$$

$$\phi - \phi_1 = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} - \frac{\alpha k}{2} \left[\frac{dS_\ell}{dk} \cos \phi + \frac{d^2}{dk^2} \frac{\partial S_\ell}{\partial r} r' \sin \phi \right]$$

$$r' - r'_1 = \frac{r'_2 - r'_1}{2} - \frac{\alpha}{2} \left[S_r \cos \phi + \left(\frac{d}{dk} \frac{\partial S_r}{\partial r} + S_\ell \right) r' \sin \phi \right]$$

$$r - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{\alpha}{2} \left[\frac{dS_r}{dk} \sin \phi - \left(\frac{d^2}{dk^2} \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{dS_\ell}{dk} \right) r' \cos \phi \right]$$

Dans ces équations, les quantités W , ϕ , r' et r affectées de l'indice 1 sont les coordonnées à l'arrivée au plan milieu de l'intervalle d'accélération dans le mouvement fictif équivalent mentionné ci-dessus : c'est-à-dire après le premier glissement et avant toute variation impulsionnelle ; celles affectées de l'indice 2 sont les coordonnées après les variations impulsionnelles équivalentes au changement complet sur tout l'intervalle d'accélération et, enfin, celles sans indice sont les coordonnées effectives, appartenant donc au mouvement "vrai", au milieu de l'intervalle d'accélération.

En outre, T_0 facteur de temps de transit sur l'axe est une fonction de k donné par :

$$T_0(k) = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} E_z(z,0) \cos kz \, dz \quad k = \frac{\omega}{\beta c}$$

où ω est la pulsation haute fréquence
 βc est la vitesse longitudinale de la particule
 L est la longueur de la cellule
 E_z est le champ électrique longitudinal sur l'axe

Les fonctions de Bessel I_0 et I_1 ont pour argument kr . S_ℓ est une fonction de k et de r donné par :

$$S_\ell(k,r) = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} E_z(z,r) \sin kz \, dz$$

où $E_z(z,r)$ est le champ électrique longitudinal pour le rayon r ; on limite dans la pratique S_ℓ à un développement à deux termes :

$$S_\ell(k,r) = S_0(k) + S_1(k) r^2$$

S_r est aussi une fonction de k et de r :

$$S_r(k,r) = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} E_r(z,r) \cos kz \, dz$$

où $E_r(z,r)$ est le champ électrique radial pour le rayon r ;

on limite dans la pratique S_r à un développement à un terme :

$$S_r(k, r) = r S'(k)$$

$$\alpha = \frac{e V_0}{2W}$$

où V_0 est la tension HF crête dans l'intervalle d'accélération.

II.2. EQUATIONS PRATIQUES

II.2.1. Introduction des paramètres

Sous leur forme précédente, les équations de la dynamique sont d'un emploi malaisé pour deux raisons : la première est qu'elles ne sont pas résolues ; la deuxième est qu'elles font intervenir des dérivées de T_0 , S_r et S_l , quantités qu'il vaut mieux rattacher directement à des intégrales sur les champs.

Dans la suite, on pose :

$$T_0 = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} E_z(z, 0) \cos \frac{2\pi z}{L} dz$$

$$T_1 = k \frac{dT_0}{dk} = -\frac{2}{L} \frac{2\pi}{L} \int_0^{L/2} E_z(z, 0) z \sin \frac{2\pi z}{L} dz$$

$$T_2 = k^2 \frac{d^2 T_0}{dk^2} = -\frac{2}{L} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \int_0^{L/2} E_z(z, 0) z^2 \cos \frac{2\pi z}{L} dz$$

$$S' = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{E_r(z,r)}{r} \cos \frac{2\pi z}{L} dz$$

$$\bar{S} = k \frac{dS'}{dk} = - \frac{2}{L} \frac{2\pi}{L} \int_0^{L/2} z \frac{E_r(z,r)}{r} \sin \frac{2\pi z}{L} dz$$

$$\bar{\bar{S}} = k^2 \frac{d^2 S'}{dk^2} = - \frac{2}{L} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \int_0^{L/2} \frac{E_r(z,r)}{r} z^2 \cos \frac{2\pi z}{L} dz$$

$$S_0 = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} E_z(z,0) \sin \frac{2\pi z}{L} dz$$

$$\bar{S}_0 = k \frac{dS_0}{dk} = \frac{2}{L} \frac{2\pi}{L} \int_0^{L/2} E_z(z,0) z \cos \frac{2\pi z}{L} dz$$

S_1 et $\bar{S}_1 = k \frac{dS_1}{dk}$ s'évaluent à partir des valeurs de S_ℓ et $\bar{S}_\ell$ prises hors de l'axe.

Tous ces coefficients sont tirés directement ou indirectement du programme IDDA [4], ou de sa version plus évoluée, CLAS [5].

D'autre part :

$I_1(kr)$ est approximé par $\frac{kr}{2}$

$I_0(kr)$ est approximé par $1 + \frac{k^2 r^2}{4}$ dans les équations en W et ϕ et par 1 dans les équations en r et r' .

On utilise en outre les relations suivantes :

$$\frac{d}{dk} (T_O I_O) = \frac{dT_O}{dk} = \frac{T_1}{k} \quad (\text{dans les équations en } r \text{ et } r')$$

$$\frac{d}{dk} (T_O k I_1) = \frac{d}{dk} \left(\frac{T_O k^2 r}{2} \right) = \frac{kr}{2} (2 T_O + T_1)$$

$$\frac{d}{dk} (T_O k I_1') = \frac{d}{dk} \left(\frac{T_O k}{2} \right) = \frac{T_O}{2} + \frac{T_1}{2}$$

$$\frac{d^2}{dk^2} (T_O k I_1) = \frac{d^2}{dk^2} \left(\frac{T_O k^2 r}{2} \right) = (2 T_O + 4 T_1 + T_2) \frac{r}{2}$$

$$\frac{d^2}{dk^2} (T_O k I_1') = \frac{d^2}{dk^2} \left(\frac{T_O k}{2} \right) = \frac{1}{k} \left(T_1 + \frac{T_2}{2} \right)$$

$$\frac{dS_\ell}{dk} = \frac{d}{dk} (S_O + S_1 r^2) = \frac{1}{k} (\bar{S}_O + r^2 \bar{S}_1)$$

$$\frac{d}{dk} \frac{\partial S_\ell}{\partial r} = \frac{2r}{k} \bar{S}_1$$

$$\frac{d^2}{dk^2} \frac{\partial S_\ell}{\partial r} = \frac{2r}{k^2} \bar{S}_1 \quad \left(\bar{\bar{S}}_1 = k^2 \frac{d^2 S_1}{dk^2} \right)$$

$$\frac{\partial S_\ell}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (S_O + S_1 r^2) = 2r S_1$$

II.2.2. Calcul de r et r' connaissant r₁ et r'₁

$$\begin{cases} r - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{\alpha}{2} \left[\frac{dS_r}{dk} \sin \phi - \left(\frac{d^2}{dk^2} \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{\partial S_\ell}{\partial k} \right) r' \cos \phi \right] \\ r' - r'_1 = \frac{r'_2 - r'_1}{2} - \frac{\alpha}{2} \left[S_r \cos \phi + \left(\frac{d}{dk} \frac{\partial S_r}{\partial r} + S_\ell \right) r' \sin \phi \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r - r_1 = -\frac{\alpha}{2} \frac{d}{dk} \left(\frac{T_O k}{2} \right) r \cos \phi - \alpha \left[\frac{d^2}{dk^2} \left(\frac{T_O k}{2} \right) - \frac{dT_O}{dk} \right] r' \sin \phi \\ \quad + \frac{\alpha}{2} \left[\frac{dS_r}{dk} \sin \phi - \left(\frac{d^2}{dk^2} \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{\partial S_\ell}{\partial k} \right) r' \cos \phi \right] \\ r' - r'_1 = -\frac{\alpha}{2} \frac{T_O k}{2} r \sin \phi + \alpha \left[\frac{d}{dk} \left(\frac{T_O k}{2} \right) - T_O \right] r' \cos \phi \\ \quad - \frac{\alpha}{2} \left[S_r \cos \phi + \left(\frac{d}{dk} \frac{\partial S_r}{\partial r} + S_\ell \right) r' \sin \phi \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} r - r_1 = -\frac{\epsilon}{2} (T_O + T_1) r \cos \phi - \frac{\epsilon}{2} \frac{T_2}{k} r' \sin \phi \\ \quad + \epsilon \left[\frac{dS'}{dk} r \sin \phi - \left(\frac{d^2 S'}{dk^2} + \frac{dS_O}{dk} \right) r' \cos \phi \right] \\ r' - r'_1 = -\frac{\epsilon}{2} T_O k r \sin \phi + \frac{\epsilon}{2} (T_1 - T_O) r' \cos \phi \\ \quad - \epsilon \left[S' r \cos \phi + \left(\frac{dS'}{dk} + S_O \right) r' \sin \phi \right] \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$\epsilon = \frac{\alpha}{2} = \frac{eV}{4W}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = r \left[1 + \frac{\epsilon}{2} (T_0 + T_1) \cos \phi - \epsilon \frac{dS'}{dk} \sin \phi \right] \\ \quad + r' \left[\frac{\epsilon}{2} T_2 \frac{\sin \phi}{k} + \epsilon \frac{d^2 S'}{dk^2} + \frac{dS_0}{dk} \cos \phi \right] \\ r'_1 = r \left[\frac{\epsilon}{2} T_0 k \sin \phi + \epsilon S' \cos \phi \right] \\ \quad + r' \left[1 - \frac{\epsilon}{2} (T_1 - T_0) \cos \phi + \epsilon \left(\frac{dS'}{dk} + S_0 \right) \sin \phi \right] \end{array} \right.$$

Ces équations sont, avec des notations évidentes, de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} r (1 + \epsilon A) + \epsilon B r' = r_1 \\ r \epsilon C + r' (1 + \epsilon D) = r'_1 \end{array} \right.$$

Leur solution s'écrit immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{(1 + \epsilon D) r_1 - \epsilon B r'_1}{(1 + \epsilon A)(1 + \epsilon D) - \epsilon^2_{BC}} \\ r' = \frac{-\epsilon C r_1 + (1 + \epsilon A) r'_1}{(1 + \epsilon A)(1 + \epsilon D) - \epsilon^2_{BC}} \end{array} \right.$$

soit encore, en négligeant les termes en ϵ^2 , c'est-à-dire en supposant le gain d'énergie petit devant l'énergie,

$$\left\{ \begin{array}{l} r = (1 - \epsilon A) r_1 - \epsilon B r'_1 \\ r' = -\epsilon C r_1 + (1 - \epsilon D) r'_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} r &= r_1 - \epsilon \left[\frac{T_0 + T_1}{2} \cos \phi - \frac{dS'}{dk} \sin \phi \right] r_1 \\ &\quad - \epsilon \left[\frac{T_2}{2} \frac{\sin \phi}{k} + \left(\frac{d^2 S'}{dk^2} + \frac{dS_0}{dk} \right) \cos \phi \right] r_1' \\ r' &= r_1' + \epsilon \left[\frac{T_1 - T_0}{2} \cos \phi - \left(\frac{dS'}{dk} + S_0 \right) \sin \phi \right] r_1' \\ &\quad - \epsilon \left[\frac{T_0}{2} k \sin \phi + S' \cos \phi \right] r_1 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} r &= r_1 - \frac{eE_e L}{4W_r} \left\{ \left[\frac{T_0 + T_1}{2} \cos \phi_1 - \frac{\bar{S}}{k} \sin \phi_1 \right] r_1 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{T_2}{2k} \sin \phi_1 + \left(\frac{\bar{S}}{k^2} + \frac{\bar{S}_0}{k} \right) \cos \phi_1 \right] r_1' \right\} \\ r' &= r_1' - \frac{eE_e L}{4W_r} \left\{ \left[\left(\frac{T_0 - T_1}{2} \right) \cos \phi_1 + \left(\frac{\bar{S}}{k} + S_0 \right) \sin \phi_1 \right] r_1' \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{T_0 k}{2} \sin \phi_1 + S' \cos \phi_1 \right] r_1 \right\} \end{aligned}$$

E_e est le champ électrique moyen qui règne dans la cellule de longueur L considérée (champ dit d'exploitation).

L'assimilation de ϕ , valeur de la phase vraie au milieu de l'intervalle d'accélération, à ϕ_1 , valeur "avant", sera justifiée plus loin.

L'énergie W se voit affecter l'indice r , pour "référence" ; l'introduction de cette énergie de référence sera faite plus loin.

II.2.3. Calcul de r_2 et r'_2 connaissant r_1 , r'_1 , r et r'

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = -\alpha \frac{d}{dk} \left(\frac{T_O k}{2} \right) r \cos \phi - \alpha \left[\frac{d^2}{dk^2} \left(\frac{T_O k}{2} \right) - \frac{dT_O}{dk} \right] r' \sin \phi \\ r'_2 - r'_1 = -\alpha \frac{T_O k}{2} r \sin \phi + \alpha \left[\frac{d}{dk} \left(\frac{T_O k}{2} \right) - T_O \right] r' \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = -\epsilon (T_O + T_1) r \cos \phi - \epsilon T_2 \frac{r' \sin \phi}{k} \\ r'_2 - r'_1 = -\epsilon T_O k r \sin \phi + \epsilon (T_1 - T_O) r' \cos \phi \end{cases}$$

Ainsi qu'il a été dit au § I.1., les divers paramètres T_O , S_l , S_r sont des fonctions de $k = \frac{\omega}{\beta c}$; les équations sont à résoudre pour la valeur de k qui correspond à la particule considérée. Or, en fait, on stocke en mémoire dans l'ordinateur les valeurs de ces paramètres pour chaque cellule qui correspondent à une certaine énergie W_r , dite de référence, pour laquelle $k = \frac{2\pi}{L}$ (ce sont les paramètres introduits au § I.2.1.). On peut alors effectuer des corrections sur ces valeurs pour les ramener à l'énergie vraie, W , de la particule dont on calcule la trajectoire.

Ces corrections sont :

$$(T_O)_W = T_O + \frac{\Delta k}{k} T_1$$

$$(T_1)_W = T_1 + \frac{\Delta k}{k} (T_1 + T_2)$$

$$(T_2)_W = T_2$$

$$(T_O k)_W = T_O k + \Delta k (T_O + T_1)$$

$$\left(\frac{T_1}{k}\right)_W = \frac{T_1}{k} + \frac{\Delta k}{k} \frac{T_2}{k}$$

$$\left(\frac{T_2}{k}\right)_W = \frac{T_2}{k} + \frac{\Delta k}{k} \frac{T_2}{k}$$

où
$$\frac{\Delta k}{k} = -\frac{W - W_r}{m_0 c^2 \beta^2}$$

Avec ces corrections, les équations deviennent :

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - \frac{eE_e L}{4W} \left\{ \left[\left(T_1 + T_0 \right) + \frac{\Delta k}{k} (2 T_1 + T_2) \right] r \cos \phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_2}{k} \left(1 + \frac{\Delta k}{k} \right) r' \sin \phi \right\} \\ r'_2 &= r'_1 + \frac{eE_e L}{4W} \left\{ -k \left[T_0 + \frac{\Delta k}{k} (T_1 + T_0) \right] r \sin \phi \right. \\ &\quad \left. + \left[T_1 - T_0 + \frac{\Delta k}{k} T_2 \right] r' \cos \phi \right\} \end{aligned}$$

II.2.4. Calcul de ϕ

$$\phi = \phi_1 + \frac{\alpha}{2} k \frac{d}{dk} (T_0 I_0) \sin \phi - \frac{\alpha}{2} k \frac{d^2}{dk^2} (T_0 k I_1) r' \cos \phi$$

$$- \frac{\alpha k}{2} \left[\frac{dS_l}{dk} \cos \phi + \frac{d^2}{dk^2} \frac{\partial S_l}{\partial r} r' \sin \phi \right]$$

$$\phi = \phi_1 + \frac{\alpha}{2} \left\{ \left[T_1 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) + T_0 \frac{k^2 r^2}{2} \right] \sin \phi \right.$$

$$- k (2 T_0 + 4 T_1 + T_2) \frac{r}{2} r' \cos \phi$$

$$\left. - (\bar{S}_0 + r^2 \bar{S}_1) \cos \phi - 2 \frac{\bar{S}_1}{k} r r' \sin \phi \right\}$$

$$\phi = \phi_1 + \frac{\alpha}{2} (B_1 \sin \phi - B_2 \cos \phi)$$

$$\text{où } \begin{cases} B_1 = T_1 + \frac{k^2 r^2}{2} \left(T_0 + \frac{T_1}{2} \right) \\ B_2 = r r' k \left(T_0 + 2 T_1 + \frac{T_2}{2} \right) + \bar{S}_0 + r^2 \bar{S}_1 \end{cases}$$

en négligeant le terme en $\bar{S}_1$.

Nous allons maintenant montrer qu'à l'approximation où nous nous plaçons, à savoir gain d'énergie petit devant l'énergie, nous pouvons remplacer ϕ par ϕ_1 dans les termes correctifs ; en effet, écrivons :

$$\phi = \phi_1 + (\phi - \phi_1)$$

dans l'équation en ϕ , et supposons $\phi - \phi_1$ petit :

$$\phi = \phi_1 + \frac{\alpha}{2} \left\{ B_1 \sin \left[\phi_1 + (\phi - \phi_1) \right] - B_2 \cos \left[\phi_1 + (\phi - \phi_1) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} \phi - \phi_1 &= \frac{\alpha}{2} B_1 \left[\sin \phi_1 + (\phi - \phi_1) \cos \phi_1 \right] \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} B_2 \left[\cos \phi_1 - (\phi - \phi_1) \sin \phi_1 \right] \end{aligned}$$

$$(\phi - \phi_1) \left[1 - \frac{\alpha}{2} B_1 \cos \phi_1 - \frac{\alpha}{2} B_2 \sin \phi_1 \right] = \frac{\alpha}{2} B_1 \sin \phi_1 - \frac{\alpha}{2} B_2 \cos \phi_1$$

Or, nous supposons α petit, donc :

$$\phi - \phi_1 = \frac{\alpha}{2} B_1 \sin \phi_1 - \frac{\alpha}{2} B_2 \cos \phi_1$$

ce qui est bien ce que nous voulions démontrer.

D'autre part, B_1 et B_2 sont calculés à partir des paramètres de référence, et sont donc valables pour l'énergie de référence ; or, nous voulons prendre leur valeur pour l'énergie vraie W , ou, à défaut, pour W_1 ; on doit donc effectuer des corrections.

$$\frac{d}{dk} \left[T_1 + \frac{k^2 r^2}{2} \left(T_0 + \frac{T_1}{2} \right) \right] = \frac{1}{k} \left[T_1 + T_2 + k^2 r^2 \left(T_0 + \frac{5}{4} T_1 + \frac{T_2}{4} \right) \right]$$

$$\frac{d}{dk} \left[k \left(T_0 + 2 T_1 + \frac{T_2}{2} \right) \right] = T_0 + 5 T_1 + \frac{7}{2} T_2$$

en définitive :

$$\phi = \phi_1 + \frac{eE_e L}{4W} (B_1 \sin \phi_1 - B_2 \cos \phi_1)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = T_1 + \frac{k^2 r^2}{2} \left(T_0 + \frac{T_1}{2} \right) + \frac{\Delta k}{k} \left[T_1 + T_2 + k^2 r^2 \left(T_0 + \frac{5}{4} T_1 + \frac{T_2}{4} \right) \right] \\ B_2 = r r' \left[k \left(T_0 + 2 T_1 + \frac{T_2}{2} \right) + \frac{\Delta k}{k} k \left(T_0 + 5 T_1 + \frac{7}{2} T_2 \right) \right] \\ \quad + \left(1 + \frac{\Delta k}{k} \right) \left(\bar{S}_0 + r^2 \bar{S}_1 \right) \end{array} \right.$$

$$\text{où : } \frac{\Delta k}{k} = \frac{W_r - W}{m_0 c^2 \beta^2}$$

II.2.5. Calcul de W

$$W - W_1 = \frac{eV_0}{2} \left[T_0 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) \cos \phi + k r \left(\frac{T_1}{2} + T_0 \right) r' \sin \phi \right. \\ \left. + (S_0 + S_1 r^2) \sin \phi \right]$$

On néglige ici le terme en $\frac{d}{dk} \frac{\partial S_l}{\partial r}$

Encore une fois, on doit faire des corrections pour se ramener à l'énergie W.

$$\begin{aligned}
 W - W_1 = & \frac{eV_0}{2} \left\{ T_0 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) + \frac{\Delta k}{k} \left[T_1 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) + T_0 \frac{k^2 r^2}{2} \right] \right\} \cos \phi \\
 & + \frac{eV_0}{2} \left\{ kr \left(\frac{T_1}{2} + T_0 \right) + \frac{\Delta k}{k} kr \left(T_0 + 2T_1 + \frac{T_2}{2} \right) \right\} r' \sin \phi \\
 & + \frac{eV_0}{2} \left\{ S_0 + S_1 r^2 + \Delta k \left(\frac{dS_0}{dk} + r^2 \frac{dS_1}{dk} \right) \right\} \sin \phi
 \end{aligned}$$

où
$$\frac{\Delta k}{k} = - \frac{W - W_r}{m_0 c^2 \beta^2}$$

$$W = W_1 + \frac{eEL}{2} \left(A_3 + \frac{\Delta k}{k} A_2 \right)$$

avec :

$$\begin{cases}
 A_2 = \left[T_1 + \frac{k^2 r^2}{2} \left(T_0 + \frac{T_1}{2} \right) \right] \cos \phi \\
 \quad + \left[k \left(T_0 + 2 T_1 + \frac{T_2}{2} \right) rr' + \bar{S}_0 + r^2 \bar{S}_1 \right] \sin \phi \\
 A_3 = T_0 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) \cos \phi + \left[k \left(T_0 + \frac{T_1}{2} \right) rr' + S_0 + r^2 S_1 \right] \sin \phi
 \end{cases}$$

On remarque que les équations en W et en ϕ sont couplées ; on résoud donc ces équations par itération ; dans la pratique, deux itérations suffisent.

II.2.6. Calcul de ϕ_2

En reprenant les résultats précédents, on obtient :

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{eE_e L}{2W} \left\{ \left[T_1 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) + T_0 \frac{k^2 r^2}{2} \right] \sin \phi - rr' k \left(T_0 + 2 T_1 + \frac{T_2}{2} \right) \cos \phi \right\}$$

En ramenant à l'énergie W,

$$\frac{\Delta k}{k} = - \frac{W - W_r}{m_0 c^2 \beta^2}$$

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{eE_e L}{2W} (B_1 \sin \phi - rr' B_2 \cos \phi)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = T_1 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) + T_0 \frac{k^2 r^2}{2} \\ \quad + \frac{\Delta k}{k} \left[T_2 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) + T_1 \left(1 + \frac{5}{4} k^2 r^2 \right) + T_0 k^2 r^2 \right] \\ B_2 = k \left(T_0 + 2T_1 + \frac{T_2}{2} \right) + \frac{\Delta k}{k} k \left(T_0 + 5T_1 + \frac{7}{2} T_2 \right) \end{array} \right.$$

II.2.7. Calcul de W₂

En reprenant les résultats précédents, on obtient :

$$W_2 = W_1 + eE_e L \left[T_0 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{2} \right) \cos \phi + rr' k \left(T_0 + \frac{T_1}{2} \right) \sin \phi \right]$$

En ramenant ici encore à l'énergie W :

$$W_2 = W_1 + eE_e L (A_1 \cos \phi + r r' A_2 \sin \phi)$$

avec :

$$\begin{cases} A_1 = T_0 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) + \frac{\Delta k}{k} \left[T_1 \left(1 + \frac{k^2 r^2}{4} \right) + T_0 \frac{k^2 r^2}{2} \right] \\ A_2 = k \left(T_0 + \frac{T_1}{2} \right) + \frac{\Delta k}{k} k \left(T_0 + 2T_1 + \frac{T_2}{2} \right) \end{cases}$$

$$\text{ou } \frac{\Delta k}{k} = \frac{W_r - W}{m_0 c^2 \beta^2}$$

II.2.8. Théorème de Liouville

Les équations théoriques de départ satisfont le théorème de Liouville. Encore convient-il de s'assurer que les équations pratiques encadrées n'ont pas perdu cette propriété. Nous allons le vérifier dans le cas particulier d'un mouvement sur l'axe ($r = r' = 0$) ; il s'agit donc de vérifier que la surface de phase $W\phi$ est invariante dans la transformation ; ou, ce qui revient au même, de vérifier que le Jacobien est égal à 1.

Dans ce cas particulier, les équations qui régissent W et ϕ s'écrivent :

$$\begin{cases} \phi = \phi_1 + \frac{eE_e L}{4W} \left\{ \left[T_1 + \frac{\Delta k}{k} (T_1 + T_2) \right] \sin \phi_1 - \left(1 + \frac{\Delta k}{k} \right) \bar{S}_0 \cos \phi_1 \right\} \\ W = W_1 + \frac{eE_e L}{2} \left[(T_1 \cos \phi + \bar{S}_0 \sin \phi) \frac{\Delta k}{k} + T_0 \cos \phi + S_0 \sin \phi \right] \\ \begin{cases} \phi_2 = \phi_1 + \frac{eE_e L}{2W} \left[T_1 + \frac{\Delta k}{k} (T_2 + T_1) \right] \sin \phi \\ W_2 = W_1 + eE_e L \left[T_0 + \frac{\Delta k}{k} T_1 \right] \cos \phi \end{cases} \end{cases}$$

Calculons le Jacobien de la 1ère transformation au 1er ordre en :

$$\frac{eE_e L}{W}$$

A cet ordre d'approximation, on peut remplacer l'équation en ϕ par :

$$\phi = \phi_1 + \frac{eE_e L}{4W} \left\{ \left[T_1 + \frac{\Delta k}{k} (T_1 + T_2) \right] \sin \phi - \left(1 + \frac{\Delta k}{k} \right) \bar{S}_0 \cos \phi \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \phi} = 1 - \frac{eE_e L}{4W} \left\{ \left[T_1 + \frac{\Delta k}{k} (T_1 + T_2) \right] \cos \phi - \left(1 + \frac{\Delta k}{k} \right) \bar{S}_0 \sin \phi \right\}$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial W} = 1 + \frac{eE_e L}{2} \frac{1}{m_0 c^2 \beta^2} (T_1 \cos \phi + \bar{S}_0 \sin \phi)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial W} & \frac{\partial W_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial W} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi} \end{vmatrix} = 1 - \frac{eE_e L}{4W} \frac{\Delta k}{k} \left[(T_1 + T_2) \cos \phi - \bar{S}_0 \sin \phi \right]$$

Le jacobien est donc égal à 1 pour des particules dont l'énergie ne s'écarte pas trop de l'énergie de référence ; plus précisément $\frac{\Delta k}{k} = \frac{W_r - W}{m_0 c^2 \beta^2}$ doit être au plus égal à $\frac{eE_e L}{W}$ pour rester à l'ordre d'approximation annoncé.

Quant à la deuxième transformation, on doit, avant d'en calculer le jacobien, la mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \phi_2 = \phi_2 (\phi_1, W_1) \\ W_2 = W_2 (\phi_1, W_1) \end{cases}$$

c'est-à-dire remplacer ϕ par son expression $\phi (\phi_1, W_1)$; en fait, une telle tentative, qui conduit à :

$$\sin \phi = \sin \phi_1 + \frac{eE_e L}{4W} (T_1 \sin \phi_1 - \bar{S}_0 \cos \phi_1) \cos \phi_1$$

$$\cos \phi = \cos \phi_1 - \frac{eE_e L}{4W} (T_1 \sin \phi_1 - \bar{S}_0 \cos \phi_1) \sin \phi_1$$

introduit dans le Jacobien des termes d'ordre supérieur en $\frac{eE_e L}{W}$, et on peut donc, à l'ordre auquel nous nous cantonnons, remplacer ϕ par ϕ_1 dans les deuxièmes membres des expressions de la transformation.

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1} = 1 + \frac{eE_e L}{2W} \left[T_1 + \frac{\Delta k}{k} (T_2 + T_1) \right] \cos \phi_1$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial W_1} = 1 - \frac{eE_e L}{m_0 c^2 \beta^2} T_1 \cos \phi_1$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W_2}{\partial W_1} & \frac{\partial W_2}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial W_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1} \end{vmatrix} = 1 \text{ avec les mêmes réserves que plus haut}$$

II.2.9. Détermination de l'accélérateur

Tout ceci suppose l'accélérateur parfaitement défini. En fait, comme il a été dit dans la première partie, il faut commencer par le déterminer.

On doit, pour ce faire, disposer des paramètres ($T_0, T_1, \dots$) pour un ensemble de cellules de dimensions proches des dimensions adoptées en définitive ; ces paramètres, qui résultent de la résolution des équations de Maxwell dans chaque cellule, sont donnés par les programmes IDDA ou CLAS. Si on n'a pas au départ d'idées assez précises sur les dimensions finales des cellules, on procède par itérations. On note ici par W_a l'énergie de la particule synchrone au plan milieu des cellules approchées, et par W_r l'énergie exacte, dite de

référence, à laquelle chaque cellule sera utilisée ; W_a est une donnée au même titre que les $T_0, T_1 \dots$; W_r est un résultat du calcul de l'accélérateur.

On doit, en outre, se donner le champ électrique moyen, sur l'axe, dans chaque cellule, E_c (champ dit de construction) ; enfin, contrairement à la méthode suivie dans la première partie, qui consistait à faire intervenir le taux d'accélération, on se donne la phase à laquelle on désire que la particule de référence (synchrone) passe au milieu des intervalles d'accélération ; cette phase peut être variable d'une cellule à l'autre.

Les équations utilisées pour calculer les longueurs exactes des cellules, dont découlent toutes les autres grandeurs, dérivent immédiatement des équations de la dynamique exposées plus haut, appliquées sur l'axe ($r = r' = 0$). On les résout par itérations.

$$\beta_{e,n} = \left[\frac{2W_{e,n}}{m_0 c^2} + \left(\frac{W_{e,n}}{m_0 c^2} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$W_{r,n} = W_{e,n} + \frac{eE_{c,n}L_n^{(i)}}{2}$$

$$\frac{T_0 \cos \phi_n + S_0 \sin \phi_n + \frac{\delta k}{k} (T_1 \cos \phi_n + \bar{S}_0 \sin \phi_n)}{1 + \frac{eE_{c,n}L_n^{(i)}}{m_0 c^2 \beta_n^2} (T_1 \cos \phi_n + \bar{S}_0 \sin \phi_n)}$$

$$\phi_{1,n} = \phi_n - \frac{eE_{c,n}L_n^{(i)}}{4W_{r,n}}$$

$$\left\{ \left[T_1 + \frac{\delta k}{k} (T_1 + T_2) \right] \sin \phi_n - \bar{S}_0 \left(1 + \frac{\delta k}{k} \right) \cos \phi_n \right\}$$

$$W_{e,n+1} = W_{e,n} + eE_{c,n}L_n^{(i)} \left(T_0 + \frac{\delta k}{k} T_1 \right) \cos \phi_n$$

$$\beta_{e,n+1} = \left[\frac{2W_{e,n+1}}{m_0 c^2} + \left(\frac{W_{e,n+1}}{m_0 c^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \frac{\delta k}{k} = \frac{W_{a,n} - W_{r,n}}{m_0 c^2 \beta_n^2}$$

$$\phi_{2,n} = \phi_{1,n} + \frac{eE_{c,n} L_n^{(i)}}{2W_{r,n}} \left[T_1 + \frac{\delta k}{k} (T_1 + T_2) \right] \sin \phi_n$$

$$L_n^{(i+1)} = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\beta_{e,n} \left(\pi + \phi_{1,n} - \frac{\phi_n + \phi_{n-1}}{2} \right) + \beta_{e,n+1} \left(\pi - \phi_{2,n} + \frac{\phi_n + \phi_{n+1}}{2} \right) \right]$$

où
 l'indice e signifie "à l'entrée de la cellule",
 l'indice n indique la n-ième cellule ($W_{r,n}$ et ϕ_n
 sont des grandeurs au milieu de la
 n-ième cellule)
 l'indice i indique la i-ième itération sur L_n ,
 ϕ_n , $E_{c,n}$ et $W_{a,n}$ sont des données,
 $W_{e,1}$ est donné, ϕ_0 est obtenu par extrapolation.

Lorsque toutes les dimensions géométriques ont été choisies, la dernière opération consiste à corriger légèrement les paramètres T_0 , T_1 ... pour les rapporter de l'énergie approchée W_a à cette énergie exacte. Ce seront ces valeurs qui seront utilisées dans les formules de dynamique des particules. Ce travail n'est à faire en principe qu'une seule fois pour un accélérateur donné ; mais comme le calcul est rapide, plutôt que de stocker les résultats hors de la mémoire centrale de l'ordinateur, on le recommence chaque fois que l'on désire calculer des trajectoires.

* Les itérations sur L_n sont interrompues quand :

$$\left| L_n^{(i+1)} - L_n^{(i)} \right| < 10^{-6}$$

II.2.10. Grandeurs mises en mémoires rapides de l'ordinateur

En plus des grandeurs de base, on met en mémoire un certain nombre de combinaisons de ces grandeurs, combinaisons qui reviennent souvent dans le calcul. Les tableaux ci-dessous résultent d'un compromis entre l'encombrement en mémoire et le temps de calcul.

- Les grandeurs liées au champ sont stockées dans un bloc E (I,J)
I est le numéro de la cellule

J = 1 : E_c , champ de construction
 2 : E_e , champ d'exploitation
 3 : $E_e L/4 W_r$
 4 : $E_e L/2$

| L : longueur de la cellule
 | W_r : énergie de référence au
 | milieu de l'intervalle
 | d'accélération

- Les grandeurs liées aux quadrupôles sont stockées dans un bloc QUAD (I,J)

J = 1 : B' gradient de champ magnétique en T/m
 2 : θ_o^2
 3 : Δ
 4 : $\alpha_s . L_{quad}/2$
 5 : α_s tel que $\alpha_s^2 = \frac{e}{p_s} B'$

| L_{quad} : longueur du quadrupôle
 | Δ et θ_o^2 : voir première partie

- Les autres grandeurs sont stockées dans un bloc CELL (I,J)

J = 1 : énergie au centre de l'intervalle
 d'accélération ; d'abord la valeur
 approchée W_a , puis la valeur vraie W_r
 2 : $K = 2\pi/L$, puis $K = 2\pi/\beta_c \lambda$

- | | | |
|-----------------|---|---|
| 3 : T_o | } | D'abord valeurs approchées pour W_a , |
| 4 : T_1 | | |
| 5 : T_2 | | |
| 6 : S_o | | |
| 7 : S_1 | | |
| 8 : $\bar{S}_o$ | | |
| 9 : $\bar{S}_1$ | | puis valeurs vraies pour W_r . |
-
- 10 : énergie au centre du tube de glissement
- 11 : L approchée, puis longueur cumulée
- 12 : $m_o c^2 \beta^2$
- 13 : inutilisé
- 14 : $(T_o + T_1)/2$
- 15 : $K^2 (T_o + T_1)/2$
- 16 : $T_1 + T_2$
- 17 : $K^2 (T_o + 5 T_1/4 + T_2/4)$
- 18 : $K (T_o + 2 T_1 + T_2/2)$
- 19 : $K (T_o + 5 T_1 + 7 T_2/2)$
- 20 : $(2 T_1 + T_2)/(2 K)$
- 21 : $(2 S_1)/K$
- 22 : $K T_o/2$
- 23 : $K (T_o + T_1/2)$
- 24 : $K^2/4$
- 25 : $(3 T_2)/(2 K)$
- 26 : L_1 distance entre le milieu d'un tube de glissement et le milieu de l'intervalle d'accélération suivant
- 27 : L_2 distance entre le milieu d'un intervalle d'accélération et le milieu du tube de glissement suivant
- 28 : $L = L_1 + L_2$
- 29 : rayon du trou de passage du faisceau
- 30 : L quad, longueur du quadrupôle

- 31 : g , longueur de l'intervalle d'accélération
- 32 : $\beta\gamma = p_r/mc$ au milieu des tubes de glissement
numérotation : $I = 1$ entrée de l'accélérateur
 $I = 2$ 1er tube complet, etc...
- 33 : distance entre la fin d'un quadrupôle et le milieu de l'intervalle d'accélération suivant
- 34 : distance entre le milieu d'un intervalle d'accélération et le début du quadrupôle suivant
- 35 : $2 L_1/\lambda$
- 36 : $2 L_2/\lambda$
- 37 : β centre de l'intervalle d'accélération
- 38 : carré du rayon du trou de passage du faisceau
- 39 : S' ($S_r = r.S'$)
- 40 : $\bar{S} = \frac{kdS'}{dk}$
- 41 : $\bar{\bar{S}} = k^2 \frac{d^2S'}{dk^2}$
- 42 : $k^2 \frac{d^2S_o}{dk^2}$
- 43 : $k^2 \frac{d^2S_1}{dk^2}$
- } ($S_\ell = S_o + S_1 r^2$)

DEUXIEME PARTIE

LA CHARGE D'ESPACE

I - TRAITEMENT de la CHARGE d'ESPACE

I.1. INTRODUCTION

I.1.1. Intérêt d'une telle étude

Sans vouloir épuiser le sujet des causes de la limitation du courant accéléré dans un accélérateur linéaire à protons, rappelons cependant les deux phénomènes principaux.

Le premier, connu sous le nom de "beam loading", charge par le faisceau, occasionne une décroissance des champs à mesure que le faisceau est accéléré ; l'énergie fournie au faisceau est prélevée sur l'énergie stockée dans la cavité ; le domaine de stabilité longitudinal se réduit, et on perd des particules ; on remédie à ceci en augmentant la puissance fournie à la cavité pendant le temps de passage du faisceau.

Le deuxième phénomène est la charge d'espace ; sous l'effet de la répulsion coulombienne, le faisceau tend à grossir, à diverger, à se dégroupier. Méfaits longitudinaux : si le paquet devient trop long, des particules risquent de sortir du domaine de stabilité longitudinal, et d'être perdues (radialement, en définitive) ; même sans sortir du domaine de stabilité, les particules risquent d'être entraînées dans des zones très non linéaires. Méfaits radiaux : si le paquet devient trop gros, il risque de heurter les tubes de glissement, d'où perte de particules ; contre ceci, il existe un remède ; on peut s'opposer au grossissement du faisceau en augmentant le courant dans les quadrupôles de focalisation ; toutefois, les qualités

du faisceau en sortie se détériorent, en ce sens que l'émittance radiale croît avec l'intensité ; ce phénomène est bien connu, mais gênant particulièrement si le faisceau est destiné à être injecté dans un synchrotron, puisqu'on risque alors de dépasser l'acceptance de ce synchrotron.

La charge d'espace est très sensible aux basses énergies, là où le faisceau est lent et difficile à focaliser ; on a donc intérêt de ce point de vue, à commencer l'accélérateur linéaire à une énergie assez haute ; une question que l'on peut se poser est donc de chiffrer le gain en courant que l'on obtient en augmentant l'énergie d'injection [31].

Une autre question que l'on peut se poser est de mieux comprendre les phénomènes responsables de l'augmentation d'émittance ; on trouvera quelques éléments de réponse dans le chapitre "Résultats" ; on y verra en particulier l'influence de l'émittance longitudinale sur l'émittance radiale ; on verra en particulier qu'il est inutile de réduire l'émittance radiale à l'entrée au-dessous d'une certaine valeur qui dépend des paramètres du groupeur. Ces considérations peuvent retentir sur la conception de nouvelles machines ; elles précisent ce qu'il est possible d'espérer et comment l'obtenir.

I.1.2. Situation de cette étude

Le phénomène de charge d'espace n'est pas une nouveauté ; même en se limitant au monde des accélérateurs, la littérature à son sujet est très abondante, et il n'est pas question de la citer ici dans son entier ; nous nous limiterons à quelques articles concernant les accélérateurs linéaires à protons, que nous classerons en plusieurs catégories :

- Calculs analytiques des forces de charge d'espace créées par une distribution connue [6] [7] [8]
- Evaluation analytique du courant maximum que l'on peut attendre d'un accélérateur [9] [10] [11]
- Effets de la charge d'espace [12] [13] [14] [15]
[16] [17] [18] [19]
- Distribution des particules dans le faisceau [20] [21] [22] [23]
[24] [25] [26] [40]

- Résultats de calculs numériques [27] [28] [29]
[30] [31] [32]
- Ouvrages généraux [33] [34] [35]

La voie purement analytique se trouve rapidement obstruée par des difficultés de calcul considérables ; on ne les surmonte qu'au prix d'approximations telles qu'on ne peut en tirer des résultats fins.

La voie purement expérimentale, elle, est limitée par essence à un petit nombre de résultats globaux, et ne semble pas permettre d'analyser finement les mécanismes en jeu.

L'ère de l'ordinateur permet de simuler des expériences dont la réalisation serait très difficile, voire impossible. C'est dans cette voie, ouverte avec succès par Mrs. CHASMAN entre autres, que s'inscrit cette étude.

Les programmes de calcul présentés ici ont été rédigés en commun avec M. MARTINI, alors au C.E.R.N. ; qu'il soit ici remercié chaleureusement pour son efficace collaboration.

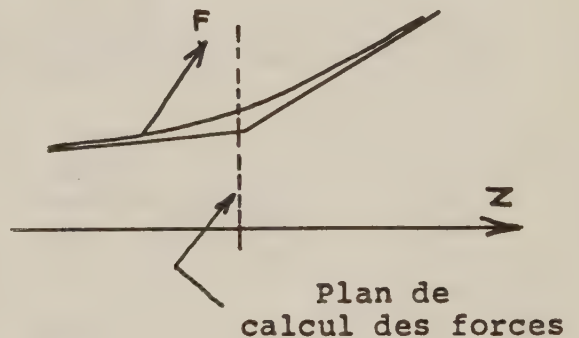
Ces programmes, écrits pour des faisceaux de protons de quelques dizaines de MeV, ne tiennent pas compte de l'effet du champ magnétique créé par le faisceau, qui vient réduire l'effet du champ électrique aux très hautes énergies (γ nettement supérieur à 1) ; ils ne tiennent pas non plus compte des effets d'image.

I.1.3. Remarques préliminaires

Le traitement rigoureux de la charge d'espace consisterait à évaluer les forces de charge d'espace qui s'exercent à un instant t (ou à l'abscisse z) sur chacune des particules, à calculer les trajectoires des particules compte tenu de ces forces pendant l'intervalle de temps dt (ou d'espace dz), à ré-évaluer les forces de charge d'espace au temps $t + dt$ (ou à l'abscisse $z + dz$), etc... Ce procédé d'intégration pas à pas présente deux inconvénients ; tout d'abord, l'évaluation des forces de charge d'espace en de nombreux instants (ou points) se traduit par un temps de calcul très long ;

ensuite, les équations de la dynamique que nous utilisons ne permettent pas de connaître les positions des particules partout ; en particulier, dans l'espace d'accélération, on ne connaît les positions des particules qu'au milieu de cet espace. C'est pourquoi il fut décidé de n'évaluer les forces de charge d'espace qu'en un petit nombre de points ; ceci revient d'ailleurs à prendre des intervalles de temps Δt (ou d'espace ΔZ) grands au lieu de les prendre très petits comme suggéré plus haut. Pratiquement, on évalue les forces de charge d'espace au milieu des intervalles d'accélération et au milieu des tubes de glissement ; ces forces sont supposées constantes sur l'intervalle pendant lequel elles agissent ; la force calculée au milieu de l'intervalle d'accélération est supposée s'exercer sur tout cet intervalle ; celle calculée au milieu du tube de glissement est supposée s'exercer sur tout ce tube. La raison de ce découpage est la suivante : on a voulu réserver la possibilité d'inclure par la suite dans ce traitement les effets d'images ; ces effets sont, bien sûr, différents suivant que l'on se trouve dans un tube de glissement ou dans un intervalle d'accélération ; dans les programmes présentés ci-après, les effets d'image ne sont pas pris en compte.

De plus, l'effet sur chaque trajectoire de cette force de charge d'espace, qui est continu, est remplacé par un effet équivalent de percussion appliqué aux endroits où on calcule les forces ; cet effet de percussion modifie les vitesses radiales (ou plutôt les pentes des trajectoires) et la vitesse longitudinale (ou, ce qui revient au même, l'énergie des particules). Les équations de la dynamique s'écrivent alors simplement :



$$\begin{cases} r'_2 - r'_1 = g(r, r', W, \phi) + G(r, \phi) \\ W_2 - W_1 = h(r, r', W, \phi) + H(r, \phi) \end{cases}$$

g et h sont les fonctions exposées au chapitre précédent, qui traduisent l'effet des champs électromagnétiques sans charge d'espace, tandis que G et H qui sont des fonctions de toutes les autres particules, traduisent les effets de la charge d'espace.

I.1.4. Relations entre les forces et les variations d'énergie et d'angles

L'équation de départ est la loi fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = m_0 \frac{d}{dt} (\gamma \vec{v}) \quad \text{où } \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\vec{F} = m_0 \left(\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{d\gamma}{dt} \right)$$

$$\vec{F} = m_0 \left(\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{v}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} \right)$$

Dans la suite nous supposons que la vitesse radiale est très petite devant la vitesse longitudinale, soit $v \approx v_z$. La relation vectorielle donne, en projection :

$$F_z = m_0 \left(\gamma \frac{dv_z}{dt} + \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv_z}{dt} \right)$$

$$F_z = m_0 \gamma^3 \frac{dv_z}{dt}$$

et

$$F_r = m_0 \gamma \left(\frac{dv_r}{dt} + v_r \frac{v_z}{c^2} \gamma^2 \frac{dv_z}{dt} \right)$$

Or, la force F_1 s'applique sur la longueur g , donc pendant le temps $\tau = \frac{g}{v_z}$; raisonnons d'abord avec F_z :

$$\int F_z dt = m_0 \gamma^3 \int dv_z$$

$$F_z \frac{g}{v_z} = m_0 \gamma^3 \Delta v_z$$

Or

$$W = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

$$\Delta W = m_0 c^2 \Delta \gamma$$

$$\Delta W = m_0 c^2 \frac{v_z}{c^2} \gamma^3 \Delta v_z$$

$$\boxed{\Delta W = F_z g}$$

Raisonnons maintenant avec F_r :

$$\int F_r dt = m_0 \gamma \left(\Delta v_r + \frac{v_r v_z}{c^2} \gamma^2 \Delta v_z \right)$$

$$F_r \frac{g}{v_z} = m_0 \gamma \left(\Delta v_r + \frac{v_r}{v_z} \beta^2 \gamma^2 F_z \frac{g}{v_z} \frac{1}{m_0 \gamma^3} \right)$$

$$\Delta v_r = \frac{g}{m_0 \gamma v_z} \left(F_r - \frac{v_r}{v_z} \beta^2 F_z \right)$$

Or

$$\Delta r' = \frac{v_r + \Delta v_r}{v_z + \Delta v_z} - \frac{v_r}{v_z}$$

$$\Delta r' = \frac{1}{v_z} \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{v_z} \Delta v_z \right)$$

$$\Delta r' = \frac{1}{v_z} \left[\frac{g}{m_0 \gamma v_z} \left(F_r - \frac{v_r}{v_z} \beta^2 F_z \right) - \frac{v_r}{v_z} \frac{Fg}{v_z m_0 \gamma^3} \right]$$

$$\boxed{\Delta r' = \frac{g}{m_0 c^2 \gamma \beta^2} (F_r - r' F_z)}$$

Les deux relations encadrées sont utilisées dans les programmes décrits ci-après :

$$m_0 c^2 = 938,232 \text{ MeV}$$

$$m_0 c^2 = 15,02723 \times 10^{-11} \text{ joules}$$

Dans les expressions telles qu'elles sont écrites, on doit exprimer :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 c^2 \text{ et } \Delta W \text{ en joules} \\ F_r \text{ et } F_z \text{ en newton} \\ g \text{ en mètre} \end{array} \right.$$

$$\Delta W_{\text{MeV}} = \frac{938,232}{15,02723} \times 10^{11} \Delta W_{\text{joules}}$$

1.1.5. Relation entre les forces et les charges

Naturellement le champ créé par une particule de charge q à la distance r s'exprime par :

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Ce champ appliqué sur une particule de charge q' exerce sur celle-ci une force :

$$F = E \times q'$$

Or, on remplace quelques vrais 10^9 protons, de charge e , formant un courant d'intensité I , par quelques centaines de particules fictives ; on veut trouver dans l'expression des forces les charges telles que ces particules fictives aient les mêmes trajectoires que quelques-unes parmi les vraies.

Les répartitions de particules traitées présentent une symétrie par rapport aux plans xz et yz ; comme l'accélérateur est supposé sans défaut d'alignement, cette propriété se conserve tout du long ; on fera donc le calcul sur N particules seulement parmi $4 N$ particules représentatives du faisceau, les $3 N$ non calculées se déduisant des N calculées par symétrie. Si T est la période HF, f la fréquence HF,

$$I = \frac{4 Nq}{T}$$

Dans cette expression, q est la charge que doit porter chaque particule fictive pour créer les mêmes champs que les vraies particules. Pour que ces champs créent sur les particules fictives les mêmes forces qu'ils auraient créées sur les particules vraies, on doit cette fois considérer que la charge portée est e ; d'où :

$$F = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{qe}{r^2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{I}{4 Nf} \cdot \frac{e}{r^2}$$

Dans les programmes utilisant cette loi en $\frac{1}{r^2}$, on introduit une variable (Q2P) telle que :

$$F = (Q2P) \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$(Q2P) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{I}{4 Nf}$$

$$(Q2P) = 3,60\ 448 \times 10^{-10} \frac{I}{Nf}$$

Avec :

	I	exprimé	en	ampère
	f	"	en	Hertz
	r	"	en	mètre
on obtient	F	"	en	newton

Dans MAPRO 2, (Q2P) a une acception un peu différente :

$$(Q2P) = \frac{e}{\epsilon_0} \cdot \frac{I}{4Nf}$$

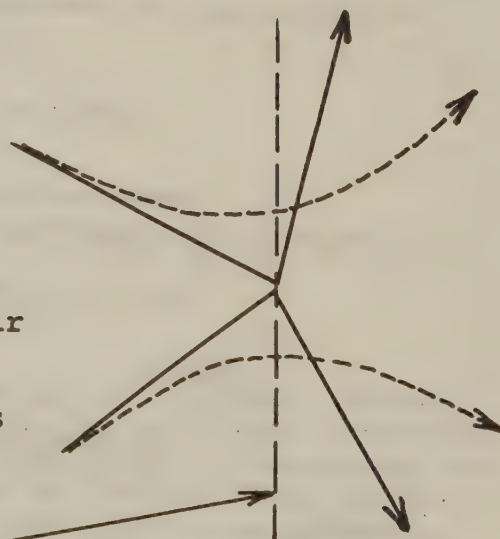
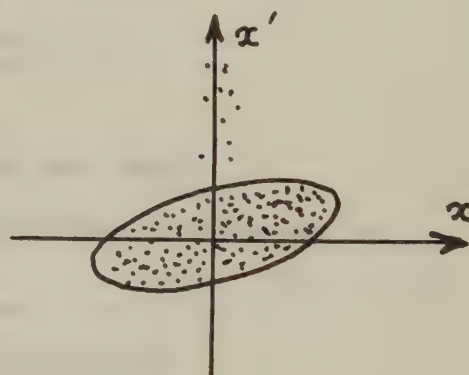
I.2. Les DIVERSES METHODES de CALCUL de la CHARGE d'ESPACE

I.2.1. Remarques sur les méthodes de calcul

Une autre série de remarques concerne la façon de calculer l'interaction d'une particule sur une autre ; il ne fait bien sûr de doute pour personne que la force qui s'exerce est en $\frac{1}{r^2}$, où r est la distance entre les

deux particules. Mais si l'on injecte brutalement une telle loi dans le procédé de calcul exposé ci-dessus, on a la désagréable surprise de voir le faisceau exploser progressivement de façon, en apparence aléatoire, mais qui est déterminée par le remplissage initial choisi.

Cette explosion prend naissance dans les plans d'émission, et s'observe par voie de conséquence dans les autres plans. La raison de ceci est simple : les forces de charge d'espace sont calculées à partir des positions que les particules occupent sans charge d'espace ; dans ces conditions, il peut se faire que deux particules viennent à se trouver très voisines l'une de l'autre ; la force de répulsion devient énorme, et on assiste à un éclatement local ; il est clair que si on avait tenu compte de la charge d'espace pour calculer les positions des particules, on ne les aurait pas trouvées si voisines.



Plan de calcul

— trajectoires calculées
 ---- trajectoires vraies

On peut imaginer plusieurs stratagèmes pour pallier cette difficulté. Un des premiers qui vient à l'esprit est de modifier la loi en

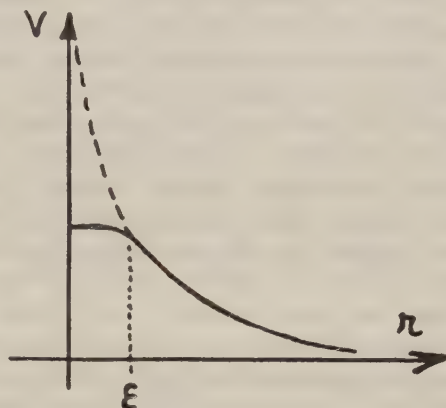
$$\frac{1}{r^2}$$

en la remplaçant par :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}}{(r^2 + \epsilon^2)^{3/2}}$$

Les choses se passent un peu comme si les particules étaient toujours distantes d'au moins ϵ ; le potentiel est alors :

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}$$



au lieu d'augmenter indéfiniment, il reste à peu près constant pour $r < \epsilon$. Il faut encore répondre à la délicate question de savoir quoi prendre pour ϵ . Un programme de calcul a été écrit suivant ce principe ; on a trouvé expérimentalement qu'une bonne valeur de ϵ était la distance moyenne des particules ; si on prend ϵ nettement plus petit, le faisceau éclate ; si on prend ϵ nettement plus grand, on ne voit plus les effets de la charge d'espace. La transition entre ces deux situations extrêmes est floue, et donc l'est la bonne valeur de ϵ . D'autre part, le temps de calcul est très élevé, principalement à cause des

$$\frac{N^2}{2} \text{ calculs de } \frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}}$$

où N est le nombre de particules traitées (en effet, chaque particule agissant sur toutes les autres, il y a N^2 termes dans le calcul des forces s'exerçant sur N particules ; en fait, à cause du principe d'action et de réaction, il suffit d'en calculer $\frac{N^2}{2}$). Cette méthode a été abandonnée au profit des suivantes.

I.2.2. Méthode des cases

Une autre façon de procéder consiste à découper l'espace occupé par le paquet de particules en petits domaines cubiques (plus généralement parallélépipédiques) ; on place un noeud de ce maillage sur la particule pour laquelle on veut évaluer la force due aux autres ; ces autres particules tombent de façon aléatoire dans les casiers situés autour ; on déplace légèrement ces particules (seulement pour le calcul des forces de charge d'espace) de façon à ce que leurs positions coïncident maintenant avec des centres de cubes situés immédiatement après en s'éloignant de la particule d'épreuve. Cette méthode est analogue à celle qui a été utilisée en référence [36] dans le programme BUNCH, qui traite la charge d'espace dans l'espace de groupement situé entre le groupeur et l'accélérateur linéaire. Cette méthode s'apparente à celle présentée plus haut en ceci qu'on interdit à deux particules d'être distantes de moins d'un demi côté d'un cube élémentaire. Pratiquement, on peut choisir ce côté pour éviter les deux écueils symétriques signalés : éclatement du faisceau, minimisation des effets de charge d'espace. Naturellement, il y a encore $\frac{N^2}{2}$ termes à calculer ; mais cette fois, le nombre de cubes dans le maillage est fini, et on peut précalculer toutes les valeurs possibles de $\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ qui donne la composante de $\vec{E}$ sur l'axe des x ; pour chacun des $\frac{N^2}{2}$ termes, on n'aura plus qu'à chercher dans une table où ont été rangées les valeurs précalculées celle que l'on veut. On gagne ainsi un facteur 2 dans le temps de calcul par rapport à la méthode vue plus haut. Le programme qui a été écrit suivant ce principe a pour nom MAPRO 1.

I.2.3. Méthode de la distribution continue équivalente

MAPRO 2 est le nom d'un programme qui repose sur un principe complètement différent. Il présente par rapport au précédent un avantage essentiel : il est beaucoup plus rapide ; partant, il permet le calcul d'un beaucoup plus grand nombre de particules, ce qui présente de l'intérêt pour faire des statistiques dans les plans d'émittance en sortie (réponses à des questions du genre : quel courant y a-t-il dans une émittance donnée). Ce résultat a été obtenu en arrivant à cal-

culer les forces de charge d'espace dans un temps proportionnel au nombre N de particules, et non plus au carré de ce nombre. L'idée de base est la suivante : on représente un paquet composé d'environ 10^9 particules par un ensemble de quelques centaines ou milliers de particules fictives ; remplaçons donc pour la charge d'espace ces quelques centaines ou milliers de particules par une distribution continue, comme l'est la distribution vraie vue macroscopiquement. Si nous disposons d'une expression analytique des champs créés par une telle distribution, il suffit de calculer cette expression pour chaque particule traitée pour résoudre le problème. Remarquons qu'une telle méthode évite du même coup le risque d'éclatement signalé plus haut.

Encore faut-il choisir une distribution continue qui soit suffisamment réaliste et pour laquelle on connaisse une expression analytique des champs. Pratiquement, on a le choix entre des distributions constantes à l'intérieur d'un ellipsoïde et nulles à l'extérieur, et des distributions exponentielles du type :

$$\chi(x,y,z) = \chi_0 e^{-K^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)}$$

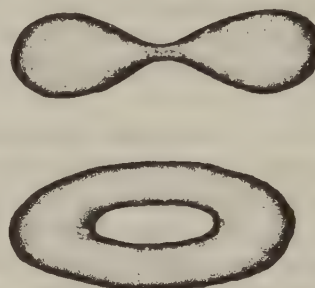
où la densité est constante sur des ellipsoïdes. La distribution constante présente l'inconvénient d'apporter deux expressions différentes des champs suivant qu'on est situé d'un côté ou de l'autre de l'ellipsoïde limite du domaine ; d'autre part, les distributions réelles ne présentent bien sûr pas de discontinuité ; ces considérations font donc choisir plutôt les distributions exponentielles, bien que les expressions des champs soient dans ce cas plus compliquées. On peut penser à choisir une distribution du type :

$$\chi(x,y,z) = \sum_i \chi_i e^{-K_i^2 \left(\frac{x^2}{a_i^2} + \frac{y^2}{b_i^2} + \frac{z^2}{c_i^2} \right)}$$

La distribution discrète composée des particules dont on calcule les trajectoires doit permettre de choisir au mieux les χ_i , K_i , a_i , b_i , c_i ; le critère de choix qui a été

adopté consiste à égaliser les moments des deux distributions, la distribution discrète vraie, et la distribution continue équivalente. Les moments d'ordre impair sont nuls car les distributions choisies présentent des symétries en x , y et z ; on égale donc les moments d'ordre pair.

Si l'on prend trois termes dans la somme, ($i = 1, 2, 3$) on est capable de représenter des paquets de particules creux, en forme d'anneaux, ou d'haltères, par exemple. On peut montrer qu'en prenant les moments des 2ème et 4ème ordres, on a assez d'équations pour trouver tous les χ_i , K_i , a_i , b_i , c_i ; malheureusement, on n'arrive pas à résoudre analytiquement ces équations, qui forment un système du 3ème degré très compliqué.



Prendre seulement deux termes ($i = 1, 2$) n'est pas une attitude cohérente ; si on égale les moments des 2ème et 4ème ordres, le problème est surdéterminé, et si on ne prend que les moments du 2ème ordre, on n'a pas assez d'équations. On s'est donc limité à un seul terme dans la somme, se privant ainsi de la latitude de décrire un paquet creux, ce qui après tout n'est pas important pour un paquet de particules dans un accélérateur linéaire.

I.3. Le TRONC COMMUN des PROGRAMMES

I.3.1. Le bloc CORD

Les deux programmes MAPRO 1 et MAPRO 2 utilisent des éléments communs, telles les équations de la dynamique présentées au chapitre I, le mode de remplissage initial et le sous-programme général de sortie des résultats sous forme graphique. Notons toutefois une différence dans la façon dont sont stockées les coordonnées des particules. Dans le premier programme, où on ne traite qu'au plus 500 particules pour des raisons de temps de calcul, on avait beaucoup de place disponible pour stocker les coordonnées des particules ; or, on a souvent besoin des coordonnées des mêmes particules en deux points, le

début et le milieu de l'intervalle d'accélération ; il est de plus commode de stocker pour chaque particule un certain nombre de quantités sous peine d'avoir à calculer plusieurs fois la même chose. On s'est donc servi d'un bloc CORD (I,J) dans lequel I est le numéro de la particule, et J :

J = 1	x	en m	
= 2	x'	en radian	
= 3	y		
= 4	y'		
= 5	W	énergie en MeV	
= 6	ϕ	en radian	
= 7	β		
= 8	$z = \phi \frac{\beta c}{2\pi f}$		
= 9	$\frac{p}{m_0 c}$	où p est l'impulsion	
= 10	$W - W_r$	Energie moins énergie de référence	
= 11	x	} Valeurs au milieu de l'intervalle d'accélération	
= 12	x'		
= 13	y		
= 14	y'		
= 15	W		
= 16	ϕ		

Il n'était pas question d'utiliser un tel bloc dans le deuxième programme qui peut traiter jusqu'à 5 000 particules. Le bloc dans lequel sont rangées les coordonnées s'appelle PART (I,J) ; I est le numéro de la particule, et J peut prendre l'une des 6 premières valeurs précédentes seulement ; comme on a quand même besoin des coordonnées des particules en deux points, ce bloc est complété par un bloc CORD (J) à une seule dimension qui sert successivement pour toutes les particules ; dans ce cas, J peut prendre les 16 valeurs précédentes, plus :

$$\begin{aligned}
 J = 17 & \quad T_0 K^2 r^2 + T_1 \left(1 + \frac{5}{4} \frac{K^2 r^2}{4} \right) + T_2 \left(1 + \frac{K^2 r^2}{4} \right) \\
 = 18 & \quad T_0 \frac{K^2 r^2}{2} + T_1 \left(1 + \frac{K^2 r^2}{4} \right) \\
 = 19 & \quad T_0 \left(1 + \frac{K^2 r^2}{4} \right) \\
 = 20 & \quad rr'
 \end{aligned}$$

qui n'existaient pas dans MAPRO 1 pour ne pas prendre quand même trop de place.

I.3.2. Le remplissage initial

La question du remplissage initial, c'est-à-dire du choix des particules dont on va calculer les trajectoires, est assez délicate. Tout d'abord, on doit distinguer entre plusieurs buts que l'on peut se fixer ; on peut vouloir faire des prévisions de comportement de faisceau pour un accélérateur existant ; dans ce cas, si l'on a su faire les calculs de trajectoires depuis la source jusqu'à l'entrée de l'accélérateur, on prend le résultat de ces calculs pour données dans le calcul des trajectoires à travers l'accélérateur linéaire ; sinon, on peut sans doute disposer de mesures effectuées sur le faisceau, par exemple avant le groupeur ; il est alors possible de trouver un remplissage initial en rr' adapté au mieux aux mesures [26] ; le programme BUNCH, auquel il a été fait allusion au § I.2.2., transforme ce remplissage initial avant le groupeur en remplissage initial à l'entrée de l'accélérateur linéaire.

On peut au contraire rechercher certains principes d'action de la charge d'espace, auquel cas on aura intérêt à partir de remplissages idéaux simples dont l'évolution sera aisée à suivre au cours de l'accélération. Essentiellement, et suivant en ceci Mrs CHASMAN [27] [28], les remplissages utilisés ont été :

- un remplissage uniforme à l'intérieur d'un hyperellipsoïde dans l'espace $xx'yy'$, et uniforme à l'intérieur d'une ellipse dans l'espace $W\phi$
- un remplissage uniforme à l'intérieur d'un hyperellipsoïde dans l'espace $xx'yy'W\phi$
- un remplissage uniforme dans l'espace $xy\phi$ et uniforme dans l'espace $x'y'W$ à l'intérieur de deux ellipsoïdes.

Les données sont les émittances radiales $\mathcal{E}_r$, prises égales dans les deux directions radiales, et r' l'émittance longitudinale $\mathcal{E}_l$ (sur la définition de l'émittance longitudinale, cf Annexe^l). On doit se donner en outre les dimensions du faisceau en x , y et ϕ , de façon à ce que le faisceau soit adapté (cf chapitre Résultats), et aussi 3 paramètres définissant la convergence éventuelle du faisceau dans les 3 plans d'émittance.

Le sous-programme dans lequel s'effectue le remplissage initial s'appelle INFILL ; les entrées de ce programme sont :

N nombre de particules
COUR courant en ampères

$P = \xi_r$ } en mètres radians
 $Q = \xi_l$ } normalisés

XAX, YAX, en mètre et radian
DFIAX

DELTX, DELTY, DELTPH

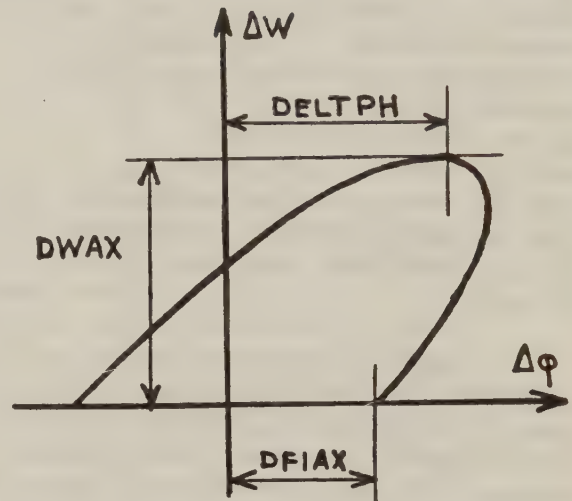
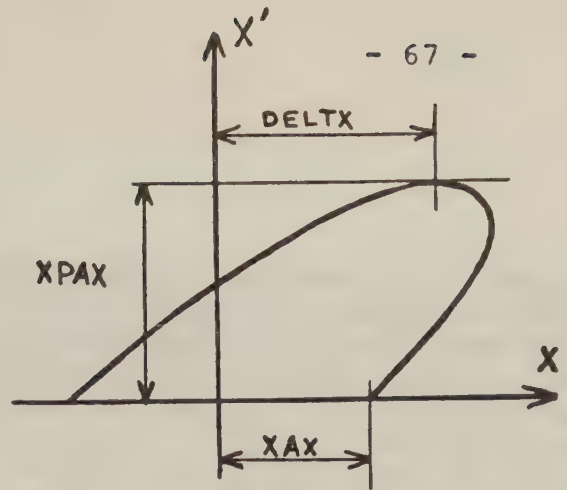
Les angles XPAX, YPAX, et l'énergie DWAX s'en déduisent.

On tire ensuite 6 nombres au hasard équiprobablement dans des domaines convenables, puis on teste si une particule ayant ces 6 nombres (normalisés à l'aide des XAX...) pour coordonnées se trouve à l'intérieur du domaine de définition de la distribution ; si oui, ces 6 nombres sont rangés dans le bloc PART ; si non, ils sont rejetés ; on en choisit 6 autres, etc...

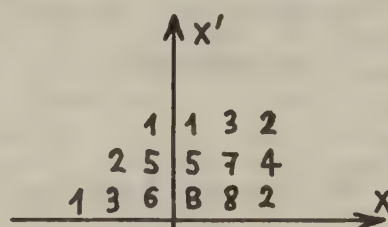
Les relations mathématiques employées sont évidentes sur la liste FORTRAN, à laquelle nous renvoyons le lecteur.

I.3.3. Sortie des résultats

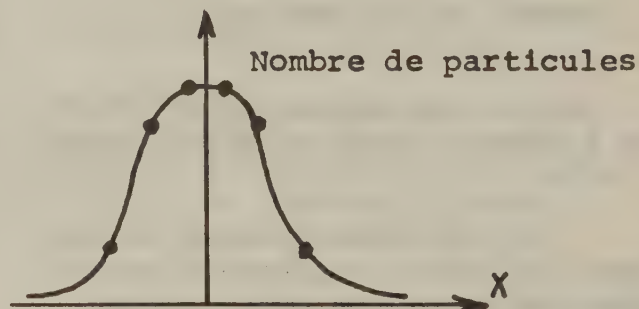
Toutes les sorties graphiques de résultats se font par un seul sous-programme, GRAPH, à plusieurs entrées. On peut, avec ce sous-programme : tracer des courbes, par exemple les dimensions du faisceau en fonction du numéro de la cellule, ou l'évolution d'une émittance ; mais aussi représenter des densités de particules, projection de l'espace à 6 dimensions sur un plan tel que XY, ou X'X, etc... ; le code est



alors le suivant : à chaque emplacement possible d'écriture d'un caractère, un blanc signifie qu'aucune particule n'a été projetée dans cette case, un 1 signifie une particule, etc... ; la séquence qui se trouve dans le bloc SYMBOL est la suivante : (b signifie blanc) . b 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z * / + - \$; A signifie 11 particules, - signifie 40, \$ signifie plus de 40 particules. Le même programme peut ensuite projeter le plan sur un axe, et représenter la répartition ainsi obtenue ; par exemple supposons que nous ayons une sortie de densité dans le plan d'émittance XX' ; à partir de là on pourra obtenir la courbe représentant les variations de la densité du faisceau projeté sur l'axe X.



C'est en particulier grâce à de telles sorties que l'on peut s'assurer que le faisceau ne devient jamais creux, et valider par là les limitations au traitement de la charge d'espace vues à propos de MAPRO 2.



On trouvera des exemples de sortie de ce programme dans les figures.

On verra sur la liste que les arguments de ce sous-programme sont au nombre de 11, dont voici la signification.

IX et IY définissent le plan de projection ; 1, 2, 3, 4, 6, 10, sont dans l'ordre X, X', Y, Y', ϕ , ΔW .

XMI, XMA, YMI, YMA déterminent le domaine du plan que l'on veut cadrer (MI pour minimum, MA pour maximum).

ITG, NUM sont deux paramètres à l'aide desquels on transmet les renseignements utiles à la rédaction des titres.

NP est le nombre de particules.

X, Y sont les adresses de départ des blocs dans lesquels sont rangées les coordonnées à transmettre ; ceci est un point délicat de programmation, aussi expliquons-le en détail.

Dans le plan que l'on imprime, il y a 121 colonnes et 60 lignes ; pour ne pas encombrer l'ordinateur avec un bloc de 121 x 60 mémoires, on imprime par bandes de 121 colonnes et 12 lignes (c'est le bloc X CHARA (12, 121)) ; il y a donc 6 bandes par plan d'impression ; pour chaque bande on regarde si chaque particule tombe dedans, et si oui, où. Or, nous avons vu que les coordonnées étaient rangées dans des blocs à 2 dimensions, CORD (I,J) pour MAPRO 1, PART (I,J) pour MAPRO 2 ; pour ne pas avoir à rechercher 6 fois toutes les coordonnées dans des blocs à 2 dimensions, ce qui est long, le sous-programme GRAPH n'a à traiter que des blocs à 1 dimension, X et Y ; on pourrait commencer avant tout traitement par verser ce qui est utile de CORD ou PART dans 2 blocs indépendants X et Y ; un tel traitement n'est pas souhaitable, surtout pour MAPRO 2, car cela revient à réserver deux blocs dimensionnés à N, nombre de particules ; or ces blocs existent, simplement ils n'ont pas été déclarés comme tels ; en effet, on trouve séquentiellement en machine : PART (1,1), PART (2,1) PART (5000,1) qui constitue un bloc des X, puis PART (1,2), PART (2,2).... ... PART (5000,2), qui constitue un bloc des X', etc... Il suffit donc de transmettre les adresses de départ des blocs et de dimensionner dans GRAPH X et Y à n'importe quoi.

Un autre point, qui mérite quelques explications est le rôle du sous-programme MIRROR ; il a trait à l'impression des répartitions projetées sur un axe ; cette répartition s'élabore dans le bloc SUM au fur et à mesure du traitement du plan ; pour pouvoir ensuite réentrer dans GRAPH normalement, MIRROR range les coordonnées des 121 points de la courbe dans HISTOR et HISTVR ; au prochain appel à GRAPH, ces points seront considérés comme étant des coordonnées de particules.

I.4. MAPRO 2

I.4.1. MAPRO 1 et MAPRO 2

Nous ne parlerons pas de MAPRO 1, pour plusieurs raisons ; il est moins original dans son principe puisque la méthode de calcul a déjà été mise en oeuvre [36] ; la plus grande partie des résultats présentés au chapitre II a été obtenue avec MAPRO 2, beaucoup plus rapide ; MAPRO 1 a été utilisé pour des vérifications, des confirmations de résultats. Les deux programmes ne donnent naturellement pas exactement les mêmes résultats ; on peut dire [32] que les phénomènes physiques observés sont qualitativement les mêmes ; quantitativement, MAPRO 2 est pessimiste par rapport à MAPRO 1 ; sur l'augmentation d'émittance, MAPRO 2 donne des accroissements supérieurs de 20 % à ceux donnés par MAPRO 1, ceci pour des courants de l'ordre de 100 mA.

I.4.2. Présentation générale de MAPRO 2

L'encombrement du programme sur CDC 6 600 est de 170 000 (octal) mémoires, y compris le chargeur et les tables. Le nombre maximum de particules qui peuvent être prises en compte est de 5 000. Le temps de calcul pour 500 particules est d'environ 2 secondes par cellule de l'accélérateur linéaire ; par exemple un calcul à travers la première cavité de l'accélérateur du CERN, qui comporte 42 cellules, prend une minute et demie avec 500 particules. Le temps de calcul croît linéairement avec le nombre de particules prises en compte.

En plus des sorties graphiques normales par GRAPH, on met sur bande magnétique un certain nombre de résultats ayant un caractère global ; ce sont, pour chaque cellule, les dimensions moyennes du paquet de particules en x, y, la dimension moyenne radiale, la dimension moyenne longitudinale, les deux émittances radiales et l'émittance longitudinale, la vitesse quadratique moyenne radiale, la vitesse quadratique moyenne longitudinale par rapport à la particule de référence. La raison de ceci est la suivante : les résultats présentés au chapitre II résultant d'une bonne centaine de passages, et ce n'est en général que lorsqu'on a déjà accumulé bon nombre de résultats que l'on s'aperçoit qu'on aurait mieux fait de demander des sorties un peu différentes ; si rien n'est sur bande, il faut tout recalculer ; si les résultats sont sur bande, il suffit d'un programme très simple pour relire la bande et obtenir les sorties voulues.

A chaque pas, le programme teste si chacune des particules doit être considérée comme perdue ou non ; ceci se fait dans le sous-programme LOST ; radialement, le critère est clair ; les particules ne doivent pas heurter les tubes de glissement ; longitudinalement, on considère comme perdue une particule dont la phase dépasse 2 radians ; pour chaque particule perdue on range dans le bloc IND un nombre entier qui est mille fois le numéro de la particule, plus le numéro de la cellule dans laquelle cette particule a été considérée comme perdue ; ce nombre est en outre affecté d'un signe, moins si la particule est perdue radialement, plus dans le cas contraire. A l'impression 150 005 signifie : particule numéro 150 perdue dans la cellule 5.

Les sous-programmes RESET et CHAS traitent le calcul des émittances et des enveloppes, ainsi qu'il est expliqué en annexe.

Les sous-programmes QG (demi-Quadrupoles, Gap), DG 1 (Demi-Gap 1 : coordonnées au centre quand on connaît les coordonnées à l'entrée), DG 2 (Demi-Gap 2 : coordonnées à la sortie quand on connaît les coordonnées à l'entrée et au milieu) et GQ (Gap, demi-Quadrupole) traitent la dynamique ainsi qu'il est exposé au chapitre II de la première partie.

Le sous-programme GENLIN calcule l'accélérateur à partir de données sous forme de cartes perforées (cf § II.2.9) et met en mémoire les paramètres utiles pour la dynamique (cf § II.2.10). (§ de la première partie).

I.4.3. Distribution équivalente

Nous allons maintenant voir comment on détermine la distribution équivalente au paquet de particules. Ainsi qu'il a été indiqué au § I.2.3., nous allons évaluer les moments de la distribution vraie et d'une distribution équivalente du type :

$$\chi = \chi_0 e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)}$$

On prendra en compte le moment d'ordre zéro, et les trois moments du second ordre en x^2 , y^2 , z^2 ; les moments du 1er ordre, du 3ème ordre, et ceux du second ordre en xy , yz , zx sont nuls ; on a ainsi le bon nombre d'équations compte tenu du nombre de paramètres à déterminer et les distributions ont donc les mêmes moments jusqu'au 4ème ordre.

En rappelant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \sqrt{2\pi} a \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = \sqrt{2\pi} a^3 \end{array} \right.$$

Il vient pour les moments de la distribution équivalente :

$$\begin{aligned} \iiint \chi \, dx \, dy \, dz &= (2\pi)^{3/2} abc \, \chi_0 \\ \iiint x^2 \chi \, dx \, dy \, dz &= (2\pi)^{3/2} a^3 bc \, \chi_0 \\ \iiint y^2 \chi \, dx \, dy \, dz &= (2\pi)^{3/2} ab^3 c \, \chi_0 \\ \iiint z^2 \chi \, dx \, dy \, dz &= (2\pi)^{3/2} abc^3 \, \chi_0 \end{aligned}$$

Les intégrales triples sont étendues à tout l'espace.

La distribution représente $4 N$ particules ; on ne calcule que sur N particules ; les moments de la distribution vraie sont donc :

moment d'ordre zéro : $4 N$

moments du second ordre :

$$4 \sum_1^N x_i^2, \quad 4 \sum_1^N y_i^2, \quad 4 \sum_1^N z_i^2$$

En fait, x et y sont des variables centrées, mais z ne l'est pas ; en posant $z = z_{av} + z_c$, où z_{av} est le z moyen du paquet de particules, et z_c une nouvelle variable centrée, on voit immédiatement que :

$$\sum z^2 = N z_{av}^2 + \sum z_c^2$$

et comme $\sum z = N z_{av}$

l'expression du 3ème moment du 2ème ordre est donc :

$$4 \sum_1^N z_1^2 - \frac{4}{N} \left(\sum_1^N z_1 \right)^2$$

En égalant les moments on trouve :

$$a^2 = \frac{\sum_1^N x_1^2}{N} \quad b^2 = \frac{\sum_1^N y_1^2}{N} \quad c^2 = \frac{\sum_1^N z_1^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_1^N z_1 \right)^2}{N}$$

$$\chi_0 = \frac{4}{(2\pi)^{3/2}} \frac{N}{abc}$$

$$\frac{(2\pi)^{3/2}}{4} = 3,93744, \text{ cf liste du programme}$$

Dans le programme, on connaît ϕ , et non pas z ;
on calcule donc z à partir de ϕ par la relation :

$$z = - \frac{\beta c}{2 \pi f} \phi$$

Dans le programme, $\sum_1^N x^2$ s'appelle SX2,
 z_c s'appelle ZRED, etc...

a, b, c, χ_0 sont calculés dans le programme principal.

I.4.4. Expression des forces de charge d'espace

Soit une distribution de charges à 3 dimensions, telle que la densité est constante sur des ellipsoïdes :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = u^2$$

La densité ne dépend que du paramètre u :

$$\chi = \chi(u)$$

On suppose en outre que la distribution s'étend à l'infini. On montre [8] que si $P(u)$ est une primitive de $u\chi(u)$, le potentiel V créé au point (x, y, z) s'écrit :

$$V(x, y, z) = - \frac{abc}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{P\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t}}\right)}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} dt$$

Appliquons ce résultat à une gaussienne :

$$\chi = \chi_0 e^{-k^2 u^2}$$

Il vient :

$$P(u) = - \frac{\chi_0}{2k^2} e^{-k^2 u^2}$$

$$V(x, y, z) = \frac{\chi_0}{\epsilon_0} \frac{abc}{4k^2} \int_0^\infty \frac{e^{-k^2 \left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t}\right)}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} dt$$

Les champs s'en déduisent immédiatement par dérivation sous le signe somme.

$$E_x = - \chi_0 \frac{abcx}{2 \epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{-k^2 \left(\frac{x^2}{a^2 + t} + \frac{y^2}{b^2 + t} + \frac{z^2}{c^2 + t} \right) e}{(a^2 + t) \sqrt{(a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)}} dt$$

et des expressions analogues pour E_y et E_z .

χ_0 est un nombre de particules par mètre cube ;
chacune de ces particules porte la charge q (en coulomb) :

$$q = \frac{I}{4 N f} \quad (\text{cf I.1.5})$$

La force qui s'exerce sur chaque particule est
(en newton) :

$$F = eE$$

$$F_x = - \chi_0 \frac{qe}{2 \epsilon_0} abcx \int_0^{\infty} \frac{-k^2 \left(\frac{x^2}{a^2 + t} + \frac{y^2}{b^2 + t} + \frac{z^2}{c^2 + t} \right) e}{(a^2 + t) \sqrt{(a^2 + t)(b^2 + t)(c^2 + t)}} dt$$

Dans le programme,

ϵ_0	s'appelle	EPSNAU
e	"	SMALLE
χ_0	"	CHINAU
$\chi_0 abc$	"	CHIABC
$\frac{qe}{\epsilon_0}$	"	Q2P

a^2, b^2, c^2 s'appellent AS, BS, CS
 x^2, y^2, z^2 " XS, YS, ZS

Les calculs sont effectués avec $k^2 = 0,5$

I.4.5. Calcul numérique des forces de charge d'espace

L'intégrale qui figure dans l'expression des forces est calculée dans le sous-programme CHARG 2 par une méthode de Gauss à 10 points.

Suivant cette méthode, le calcul de :

$$I = \int_a^b \phi(t') dt'$$

se ramène à :

$$I = \frac{b-a}{2} \left[H_1 \phi(t'_1) + \dots + H_{10} \phi(t'_{10}) \right]$$

où :

$$t'_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} u_i$$

Les 10 u_i sont les racines du polynôme de Legendre de degré 10

$$H_i = \int_{-1}^{+1} \frac{\prod_{s \neq i}^n (u - u_s)}{\prod_{s \neq i}^n (u_i - u_s)} du$$

On ramène l'intégrale à calculer à avoir les bornes 0 et 1 par le changement de variable :

$$t = \frac{1}{t'} - 1$$

L'intégrale à calculer,

$$I = \int_0^\infty f(t) dt \text{ devient } I = \int_0^1 \frac{g(t')}{t'^2} dt' ; \text{ posons :}$$

$$\phi(t') = \frac{g(t')}{t'^2}$$

alors :

$$I = \frac{1}{2} \sum_1^{10} \frac{H_i g(t'_i)}{t'^2_i}$$

en posant :

$$W_i = \frac{H_i}{2 t'^2_i}, \text{ il vient :}$$

$$I = \sum_1^{10} W_i g(t'_i)$$

mais comme

$$g(t'_i) = f(t_i)$$

en définitive :

$$I = \sum_1^{10} W_i f(t_i)$$

où, pour la composante en x de la force :

$$f(t) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t} \right)}}{(a^2+t) \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}$$

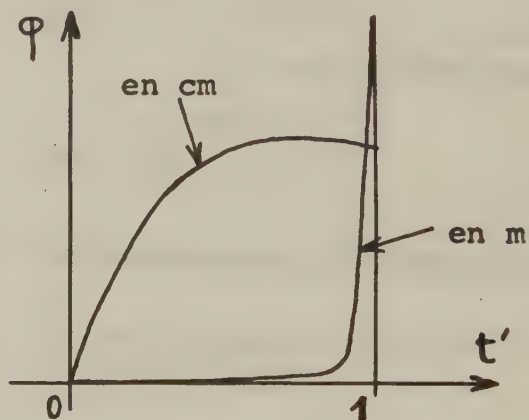
L'utilisation de ce sous-programme se fait en deux étapes : une fois connus les a, b, c, on rentre dans CHARG 2 pour calculer les quantités qui ne dépendent pas de x, y, z ; on range ces quantités en mémoire. Ensuite, pour chaque particule, la force qui s'exerce dessus est calculée en rentrant par l'entrée CHARG ; les 3 composantes de la force reviennent par les arguments. Les t_i et W_i sont rentrés par les instructions DATA T (1) /.../, W (1) /.../, etc...

Les unités employées dans le programme sont celles du système MKSA rationalisé. Si on calcule les intégrales par la méthode exposée ci-dessus sans précautions, on trouve des résultats complètement faux ; en effet, la méthode de Gauss à n points donne un résultat rigoureux si la fonction à intégrer est un polynôme de degré $\leq 2n - 1$. On conçoit qu'on obtiendra un résultat raisonnable avec 10 points si la fonction à intégrer peut être représentée assez bien par un polynôme de degré 19.

Dans le changement de variable :

$$t' = \frac{1}{t + 1}$$

la borne 0 devient 1, et la borne ∞ devient 0 ; t représente le carré d'une longueur, et t' l'inverse. Les x , y , z , a , b , c , sont de l'ordre du centimètre ; si on les exprime en mètre, la fonction que l'on intègre, $\phi(t')$, n'a une valeur appréciable que pour t de l'ordre de 10^{-4} m, donc t' très voisin de 1 ; il y a typiquement 10 ordres de grandeur entre $\phi(0,5)$ et $\phi(1)$, et $\phi(t')$ a l'allure ci-contre.



Si on fait le calcul en centimètre, $\phi(t')$ a une allure beaucoup plus régulière dans l'intervalle d'intégration. Il faut alors multiplier le résultat par 10^6 car I a L^{-3} pour dimensions.

Il revient au même de faire les calculs en mètre, mais de multiplier les t_i par 10^{-4} , et de multiplier les résultats par 10^{-4} (ceci revient à intégrer dans l'intervalle $0, 10^{-4}$). C'est ce qui est fait dans le programme.

II - RESULTATS

II.1. INTRODUCTION

Un des buts de cette étude est de mettre en évidence le phénomène d'accroissement de l'émittance radiale, de préciser dans quelles conditions il intervient, et de chiffrer cet accroissement en fonction du courant. Les résultats proviennent de calculs numériques sur un accélérateur déterminé, avec certains réglages de cet accélérateur. On peut se demander ce qu'ils auraient été si on avait conduit les calculs sur un autre accélérateur. La simplicité de certains résultats trouvés (phénomènes de transfert d'émittance, égalisation des vitesses radiale et longitudinale, forme de la loi d'accroissement d'émittance en fonction du courant) apporte une bonne garantie quant à la généralité des résultats qualitatifs ; quantitativement, l'ordre de grandeur de l'accroissement d'émittance est sans doute transposable à d'autres machines, mais sa valeur précise dépend naturellement de la machine considérée et de ses réglages.

Tous les calculs ont porté sur la première cavité de l'accélérateur linéaire injecteur du synchrotron du CERN. Cette cavité comporte 42 cellules, pour une énergie finale de 10 MeV ; l'énergie initiale est de 520 keV.

On n'a pas cherché à faire varier la loi de focalisation quadrupolaire de façon à mieux canaliser les faisceaux d'intensité élevée ; au contraire, on a gar-

dé systématiquement la loi de focalisation adoptée à faible intensité (sauf exception : cf § II.3.1.) Rappelons à ce sujet que Mrs CHASMAN [27] avait trouvé que l'accroissement d'émittance était moindre si on augmentait la focalisation à haute intensité ; ce procédé ne semblait pas changer la nature des phénomènes en jeu. Le mode de focalisation choisi est $++ --$; on trouverait vraisemblablement des accroissements d'émittance plus petits avec le mode $++--$. Si on s'était posé la question de savoir comment régler l'accélérateur pour obtenir la meilleure émittance pour un courant donné, il aurait fallu faire varier mode et loi de focalisation, mais ce n'était pas notre propos.

Pour pouvoir commodément suivre l'évolution des émittances au cours de l'accélération, il était souhaitable de ne perdre que peu de particules ; on a donc systématiquement choisi des remplissages initiaux (cf § I.3.2.) largement à l'intérieur des acceptances, au moins pour les courants pas trop élevés. La plupart des calculs ont été effectués avec un remplissage uniforme à l'intérieur d'un hyperellipsoïde dans l'espace $xx'yy'$, et uniforme à l'intérieur d'une ellipse dans l'espace $W\phi$; c'est le remplissage utilisé par Mrs CHASMAN ; les deux autres remplissages mentionnés au § I.3.2. ont été essayés à titre de comparaison avec le premier, sur quelques cas ; on n'a pas décelé de différence significative dans les résultats.

Dans ce chapitre, par émittance il faudra entendre émittance normalisée.

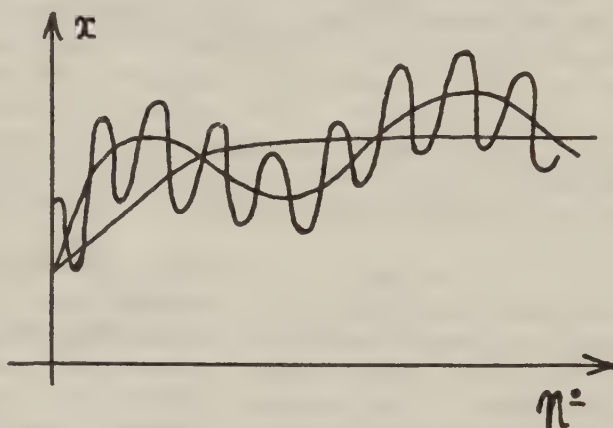
II.2. PREMIERS RESULTATS

II.2.1. Adaptation

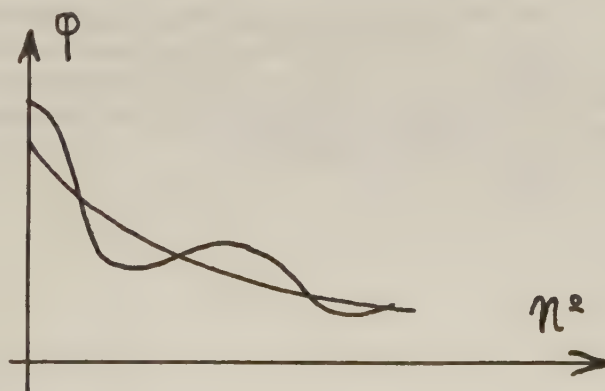
Dès 1968, Mrs CHASMAN publiait [27] [28] un certain nombre de résultats de calcul de charge d'espace dans un accélérateur linéaire à protons ; ces calculs étaient relatifs à l'injecteur de l'AGS au Brookhaven National Laboratory ; reproduits avec MAPRO 2 sur l'injecteur du P.S. du CERN, ils ont redonné qualitativement les mêmes résultats

[32]. Nous en dégagerons trois points principaux.

Un premier point important, qui n'est pas à proprement parler un résultat, mais qui conditionne les résultats, a trait à l'adaptation. On dira que le faisceau est adapté lorsque son enveloppe, à l'approximation douce, n'oscille pas ; sur l'enveloppe du faisceau en x par exemple, on voit nettement des oscillations dues à la focalisation quadrupolaire, inévitables, et une oscillation beaucoup plus lente, au double de la fréquence bêta-tron (comme il se doit pour une oscillation d'enveloppe) ; on voit aussi en général des variations d'enveloppe qui se superposent à l'oscillation bêta-tron ; ces variations d'enveloppe viennent du fait que la loi de variation des courants dans les quadrupoles en fonction du numéro du quadrupole ne conduit tout simplement pas à une dimension moyenne du faisceau constante. Dans les calculs effectués les variations d'enveloppes étaient faibles pour des intensités accélérées faibles, et relativement importantes à 100 mA ; ceci est bien naturel : les quadrupoles sont réglés pour une intensité nulle ; à haute intensité il faudrait augmenter le courant dans les quadrupoles pour conserver une enveloppe moyenne constante, ce que nous n'avons pas voulu faire ainsi qu'il est exposé au § II.1.



En ce qui concerne la dimension longitudinale du faisceau, mesurée en phase par exemple, on y distingue une oscillation à une fréquence double de la fréquence synchrotron, et une décroissance lente du fait de l'amortissement naturel.



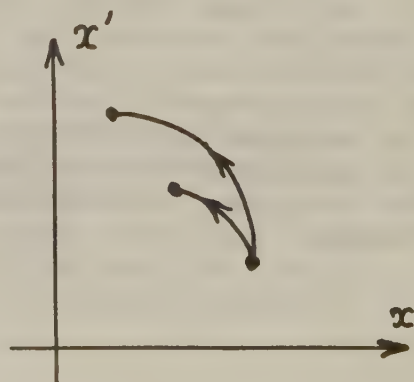
Le faisceau sera dit adapté si on l'injecte de telle façon qu'il n'y ait pas d'oscillation d'enveloppe, ni dans les deux directions radiales, ni dans la direction longitudinale. On y arrive en jouant sur le rapport des axes des ellipses d'émittance à l'entrée, et aussi sur l'inclinaison des axes ; naturellement ce réglage est fonction du courant, et des émittances choisies (cf § I.3.2.).

Il existe une méthode analytique [23] [27] qui fournit en principe la dimension des axes cherchés ; cette méthode n'a pas été utilisée ici car elle ne fournit qu'une valeur approchée, quelquefois excellente, mais parfois mauvaise, suivant les valeurs des émittances et du courant. Il a paru plus simple d'employer la méthode des essais successifs (2 essais suffisent en général), qui présente en outre l'avantage de montrer la sensibilité des résultats en fonction de l'adaptation.

Quoiqu'il en soit, une chose est claire : c'est avec un faisceau adapté que l'on obtient les accroissements d'émittance les plus petits. Ceci est vrai en charge d'espace, mais aussi à courant nul ; le phénomène d'accroissement d'émittance étant une conséquence possible de couplages entre les variables, que ces variables soient couplées par les forces de charge d'espace ou par les champs des intervalles d'accélération, le résultat est de même nature.

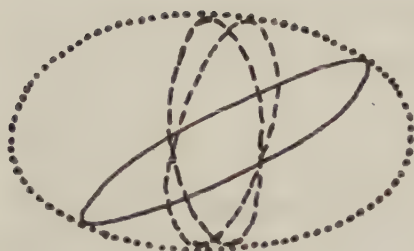
Avec un courant nul, les émittances d'un faisceau adapté n'augmentent pratiquement pas, sans doute parce que les couplages sont alors faibles. On peut s'expliquer que les émittances changent moins quand le faisceau est adapté de la façon suivante : chaque point d'un plan de phase est la projection d'une quadruple infinité de points de l'espace à 6 dimensions.

Représentons les trajectoires de phase de deux de ces points ; en général, elles diffèrent par leur forme et sont parcourues avec des vitesses différentes.



non adapté

adapté



————— domaine à l'instant t_0

----- un peu après

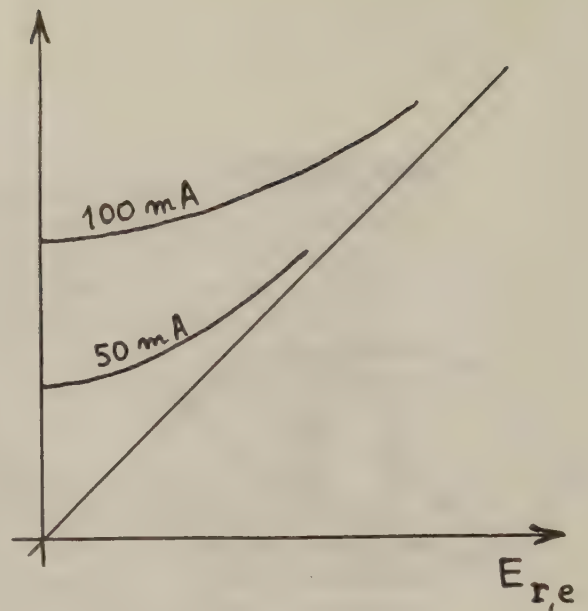
..... longtemps après

Ceci fait que dans le cas non adapté, les points représentatifs finissent par remplir tout le domaine limité par les trajectoires de phase des particules extrêmes, tandis que dans le cas adapté, l'augmentation de surface ne vient que du fait des formes différentes des trajectoires, et reste modeste.

II.2.2. Augmentation de l'émittance radiale

Tout ce qui sera dit par la suite sera relatif à des faisceaux adaptés, ou tout au moins pas trop désadaptés. Dans ces mêmes conditions, et si on garde constante l'émittance longitudinale initiale d'un cas à l'autre, on trouve le résultat suivant : l'émittance radiale de sortie $E_{r,s}$ est d'autant supérieure à l'émittance radiale d'entrée $E_{r,e}$ que celle-ci est petite et le courant élevé.

A courant nul, $E_{r,s} = E_{r,e}$; à courant non nul donné, il y a une valeur minimum de $E_{r,s}$ au-dessous de laquelle on ne peut pas descendre, même si l'on savait réaliser $E_{r,e}$ infiniment petit. Cette valeur minimum est une fonction croissante du courant. Ce résultat est important en ce sens qu'il montre :



1 - qu'il est inutile de perfectionner les sources au-delà d'un certain point, à partir duquel l'émittance à la sortie de l'accélérateur linéaire devient indépendante de l'émittance à l'entrée.

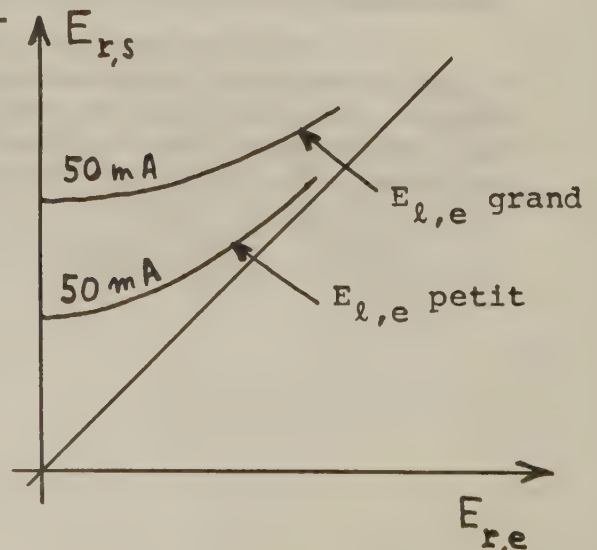
2 - Que l'accélérateur linéaire ne se comporte pas comme un multiplicateur d'émittance, comme on le dit parfois, mais plutôt comme un générateur d'émittance, fonction du courant. Nous développerons cette remarque au § II.3.4.

Comme l'émittance de sortie ne peut pas non plus dépasser une certaine limite supérieure du fait même que le faisceau doit passer dans les trous des tubes de glissement, l'émittance de sortie est comprise entre deux limites ; à courant élevé (200 mA dans nos calculs), ces deux limites sont si proches l'une de l'autre que l'on perd beaucoup de particules en cours de calcul.

II.2.3. Influence de l'émittance longitudinale

Le troisième point important a trait à l'influence de l'émittance longitudinale $E_{l,e}$ à l'entrée sur l'émittance radiale.

Pour une même émittance radiale d'entrée $E_{r,e}$ et un même courant, $E_{r,s}$ est d'autant plus grand que $E_{l,e}$ est grand.



Tout se passe comme si, du fait des couplages longitudinal-radial, on avait un transfert d'émittance du plan de phase longitudinal aux plans de phase radiaux. On observe d'ailleurs que, dans certaines conditions, l'émittance longitudinale de sortie $E_{\ell,s}$ peut être inférieure à l'émittance longitudinale à l'entrée $E_{\ell,e}$. D'autre part, pour un courant donné, $E_{\ell,s}$ ne peut qu'être supérieur à un certain seuil, quel que soit $E_{\ell,e}$; ce seuil dépend du courant. On voit donc que ce qui a été dit au paragraphe précédent sur l'émittance radiale est transposable à l'émittance longitudinale ; on voit aussi qu'on ne peut pas comprendre l'évolution d'une émittance sans mettre l'autre en jeu, et que le problème est un tout dont on ne peut pas examiner un aspect seulement.

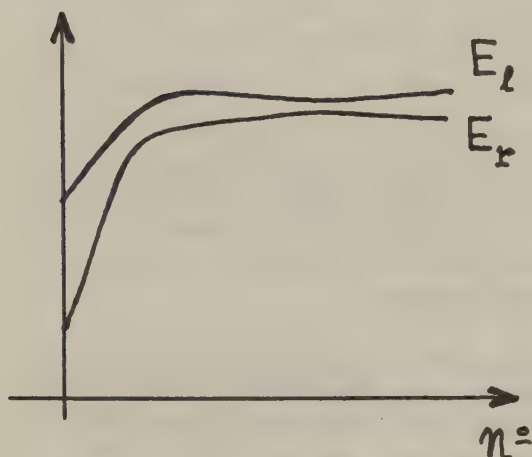
Pratiquement, ceci signifie que le réglage du groupeur (même en négligeant son action en tant que lentille hyperfréquence) retentit sur l'émittance radiale de sortie, sans qu'on puisse pour autant garantir qu'un choix de $E_{\ell,e}$ petit assure que $E_{r,s}$ reste voisin de $E_{r,e}$ (ce qui est en léger désaccord avec [28]).

II.3. Les ROUAGES de la CHARGE d'ESPACE

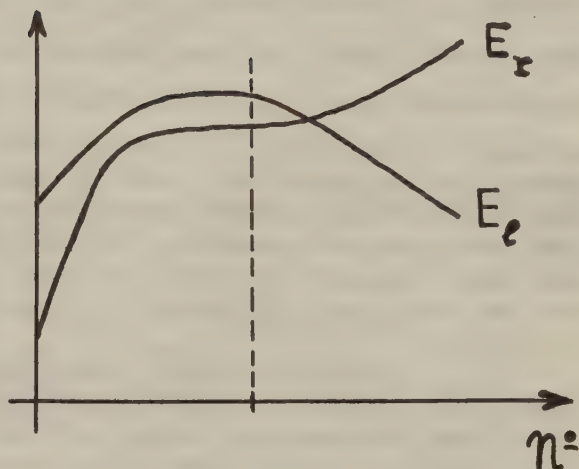
II.3.1. Evolution de E_r et E_ℓ

Au bout de quelques passages sur ordinateur, on remarque que l'on a beau partir d'émittances radiales et longitudinales très différentes, à l'énergie de 10 MeV, les émittances sont voisines : pas exactement égales, mais différant rarement de plus d'un facteur 3. Cette constatation sera utilisée dans la suite, mais elle n'a rien de fondamental ; elle ne découle pas directement d'un principe général de la physique, ainsi qu'on peut s'en persuader simplement comme suit :

Loi de quadrupôles normale

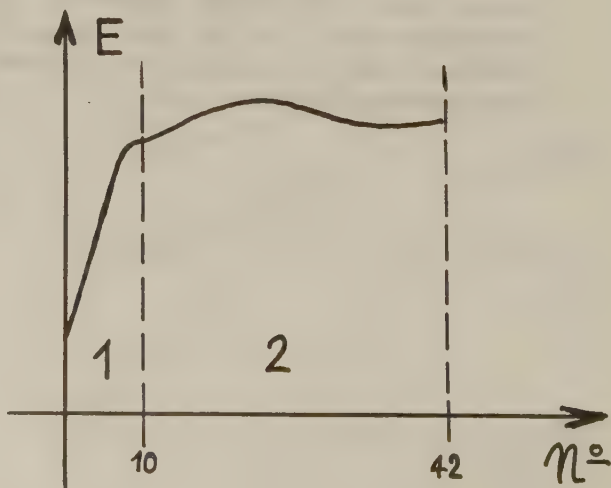


Loi de quadrupôles modifiée à partir du rang n



A partir d'un cas de figure où E_r et E_l s'égalisent presque, modifions les courants dans les quadrupôles à partir du rang n , sans rien changer d'autre ; on observe que E_r et E_l deviennent franchement différents. L'égalité de E_r et E_l est donc un phénomène fortuit, dont l'occurrence dépend de la loi de focalisation. (Sur les figures, est porté en abscisse le numéro de la cellule, compté à partir du côté basse énergie de l'accélérateur).

Une deuxième chose que l'on remarque sur l'évolution de E_r et E_l , c'est que cette évolution se passe en deux temps ; dans le premier temps, on assiste à une augmentation rapide de l'émittance, sur une dizaine de cellules seulement ; dans le deuxième temps, l'émittance évolue lentement, croissant ou décroissant légèrement au gré de la loi de focalisation choisie.



C'est dans le premier temps que se produit la dégradation irréversible des qualités du faisceau. Au cours du deuxième temps, l'évolution a un caractère réversible ; suivant la loi de focalisation, E_r croît et E_ℓ décroît, ou bien l'inverse ; mais E_r et E_ℓ ne varient jamais dans le même sens, comme dans le premier temps. Ceci suggère qu'une quantité intéressante à observer pourrait être la somme des émittances. Nous y reviendrons au § III.3.3.

II.3.2. Vitesses moyennes

Une des idées avancées en 1968 par P. LAPOSTOLLE était celle du "modèle statistique" [14] ; en s'appuyant sur le concept de transferts d'énergie entre les paramètres de liberté par l'intermédiaire des interactions entre particules, on pouvait concevoir que les températures d'un faisceau dans les diverses directions devaient tendre à s'égaliser ; comme ce processus est irréversible, quelque chose se dégrade : l'entropie dans les systèmes mécaniques, l'émittance pour un faisceau. Cette idée était trop prometteuse pour ne pas être reprise ici. C'est la raison pour laquelle on a cherché à calculer, non pas des températures, mais ce qui revient au même, des vitesses quadratiques moyennes, pour les 3 degrés de liberté de notre système.

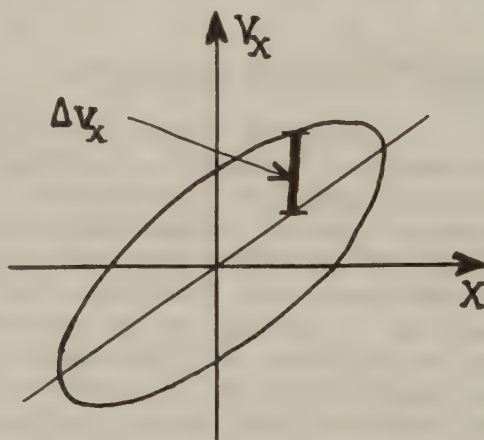
Longitudinalement, il s'agira des écarts entre les vitesses des particules et celle de la particule moyenne, choisie comme ayant une vitesse égale à la moyenne des vitesses des particules constituant le faisceau ; on désigne par V_ℓ la vitesse quadratique moyenne ainsi trouvée, en prenant pour unité la vitesse de la lumière. En suivant l'évolution de V_ℓ au cours de l'accélération, on trouve une variation d'ensemble superposée à des oscillations de faible amplitude ; ces oscillations sont des oscillations synchrotron, elles sont en opposition de phase avec les oscillations de la dimension longitudinale du faisceau, et d'autant plus faibles que l'adaptation est meilleure ; nous les négligerons pour ne plus parler que des variations d'ensemble.

Radialement, les choses sont plus compliquées à cause de la focalisation quadrupolaire.

Si l'on prend simplement $\sqrt{v_x^2}$, les oscillations au rythme de la maille quadrupolaire sont d'une telle amplitude qu'elles masquent le sens général de l'évolution ;

prendre $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ n'arrange pas spectaculairement les choses. On obtient par contre un résultat satisfaisant en

calculant $\sqrt{\Delta v_x^2}$; Δv_x est la quantité indiquée sur la figure, et les détails du calcul de cette quantité sont indiqués au § III.2. de l'annexe.

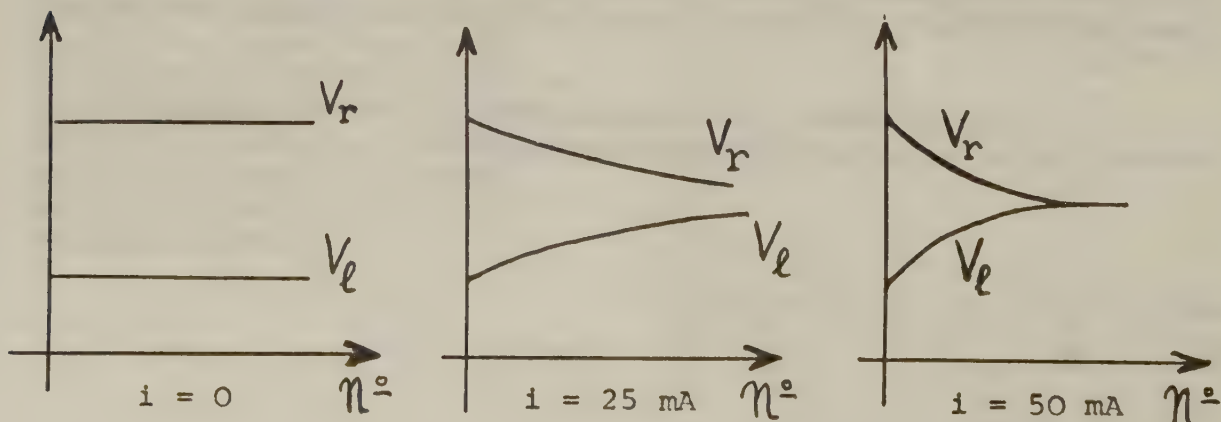


En définitive, la vitesse quadratique moyenne radiale est définie par :

$$V_r = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2}$$

avec la même unité que V_ℓ . En suivant l'évolution de V_r au cours de l'accélération, on trouve les mêmes types d'oscillation que plus haut, plus une variation d'ensemble.

En portant sur un même graphique V_r et V_ℓ en fonction du numéro de la cellule, on trouve typiquement :



Sous l'effet de la charge d'espace, les vitesses quadratiques moyennes radiale et longitudinale tendent à s'égaliser.

A courant nul, les vitesses restent constantes ; à courant élevé elles s'égalisent rapidement ; la vitesse d'égalisation est manifestement une fonction croissante du courant ; il n'a toutefois pas été possible de préciser la forme de cette fonction, par suite de l'imprécision des résultats ; toutes les sorties ayant trait aux vitesses sont entachées d'un bruit statistique plus important que les autres sorties ; il est de ce fait difficile d'y mesurer des choses fines ; de telles mesures requerreraient de coûteux passages à 5 000 particules.

Nous allons voir que ce résultat important permet d'expliquer pourquoi l'évolution de l'émittance n'a pas un caractère fondamental, ainsi qu'il a été suggéré au § II. 3.1. Pour ce faire, suivons l'évolution des dimensions moyennes du paquet de particules : rayon moyen et dimension longitudinale moyenne ; on trouve que pratiquement les dimensions moyennes, au cours de l'accélération, ne diffèrent jamais d'un ordre de grandeur ; en fin de calcul, à 10 MeV, elles sont même souvent presque égales. Reportons-nous maintenant à une remarque du § III.2. de l'annexe ; à un coefficient près :

$$E_r = V_r \times \text{dimension radiale moyenne}$$

$$E_l = V_l \times \text{dimension longitudinale moyenne}$$

Si la charge d'espace a pour conséquence $V_r = V_l$, alors il est tout à fait naturel que $E_r = E_l$.

Si maintenant nous changeons la loi de focalisation quadrupolaire, nous changeons les dimensions du faisceau ; il peut maintenant y avoir un rapport 3 entre les dimensions radiale et longitudinale ; ce rapport se retrouve sur E_l et E_r ; comme la variation de dimensions est lente, la variation d'émittance l'est aussi.

II.3.3. Hyperémittances

On a vu au § II.3.1 que dans le deuxième temps de l'évolution des émittances, E_x et E_y variaient en sens inverse ; on est donc naturellement amené à chercher si une combinaison de ces émittances, sorte d'hyperémittance H , ne resterait pas constante dans ce deuxième temps.

On a essayé 3 combinaisons :

$$H_1 = E_x + E_y + E_\ell$$

$$H_2 = \sqrt[3]{E_x E_y E_\ell}$$

$$H_3 = \frac{1}{\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \frac{1}{E_\ell}}$$

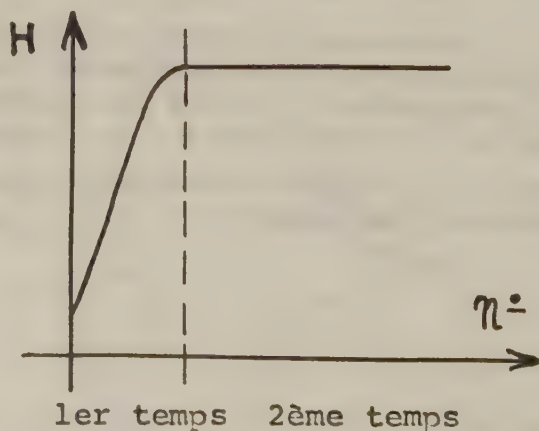
Ces combinaisons sont apparentées aux invariants de Poincaré (cf annexe) ; H_1 ressemble à I_3 , H_2 à I_1 , et H_3 qui s'écrit encore :

$$H_3 = \frac{E_x E_y E_\ell}{E_x E_y + E_y E_\ell + E_\ell E_x}$$

ressemble à $\frac{I_1}{I_2}$.

Il ne s'agit là que de ressemblances, car les invariants de Poincaré ne s'appliquent en toute rigueur qu'aux distributions de particules décrites en annexe.

Néanmoins, on a la surprise de trouver que H_1 , H_2 , H_3 restent tous trois à peu près constants dans le deuxième temps de leur évolution, sans que l'on puisse discerner nettement lequel est le plus constant.



Nous ne sommes pas surpris de trouver qu'une de ces quantités reste constante ; montrons qu'il est alors normal que les deux autres le soient aussi, du fait même que E_x , E_y , E_ℓ ont des valeurs voisines. Par souci de simplicité, raisonnons sur deux quantités y_1 et y_2 au lieu de trois.

y_1 et y_2
seront deux fonctions
linéaires variant en
sens inverse, et se
coupant en A :

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = 2 - x \end{cases}$$

$h_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ est la
droite $h_1 = 1$.

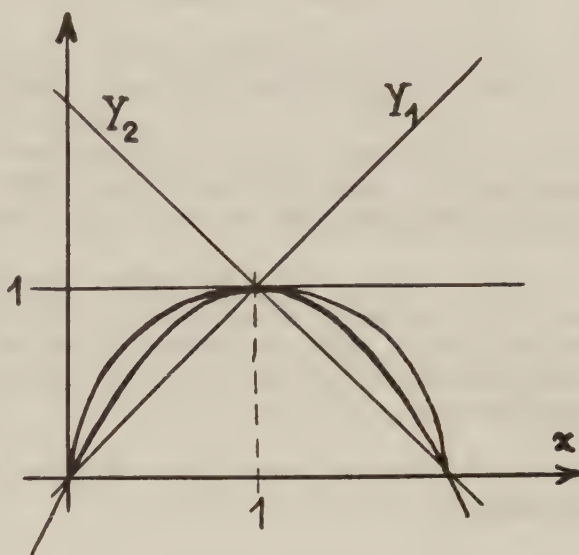
$h_2 = \sqrt{y_1 y_2}$ est le
demi-cercle de rayon 1
et tangent à h_1 en A.

$$h_3 = \frac{2}{\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}} \text{ est la parabole } h_3 = x(2 - x)$$

aussi tangente à h_1 en A. Au voisinage de A, h_1 , h_2 , h_3
ont des variations au moins de 2ème ordre comparées à
celles de y_1 et y_2 considérées comme étant du 1er ordre.

E_x , E_y , E_ℓ ne sont pas rigoureusement égaux,
mais leurs variations sont fortement atténuées dans les
combinaisons H_1 , H_2 , H_3 , que nous désignerons par leur
valeur commune H (dans les calculs numériques, on a choisi H_1).

Dans le cadre de la conservation de cette quantité, on peut donc en principe troquer de l'émittance radiale contre de l'émittance longitudinale, ou l'inverse ; il suffit pour ce faire, de choisir en conséquence la loi de focalisation quadrupolaire. Jusqu'où peut aller ce troc



est une autre question ; sûrement pas jusqu'à l'épuisement complet d'une des émittances. F. SACHERER [39] montre en particulier que dans le cas d'un système comportant deux degrés de liberté et soumis à des transformations linéaires et symplectiques :

$$\begin{cases} E_{1s} + E_{2s} > E_{1e} + E_{2e} \\ |E_{1s} - E_{2s}| \leq |E_{1e} - E_{2e}| \end{cases}$$

où les indices e et s signifient entrée et sortie ; le système ne peut évoluer que vers l'augmentation de la somme des émittances et vers la diminution de leur différence.

Ici, où les équations des transformations sont non linéaires, le premier point reste vrai, mais le deuxième ne l'est pas, puisque dans le deuxième temps de l'évolution des émittances on peut augmenter la différence des émittances.

Nous nous limiterons donc à énoncer le résultat suivant :

Il existe une combinaison des émittances dans les 3 directions, par exemple leur somme, qui ne décroît jamais au cours de l'accélération ; après une croissance rapide, elle reste ensuite quasi-constante.

II.3.4. Loi d'évolution de l'hyperémittance

H_e et H_s étant les hyperémittances à l'entrée et à la sortie de l'accélérateur, il est tentant de chercher quelle relation les lie ; cette relation dépendant du courant, est donc de la forme :

$$H_s = f(H_e, i)$$

On simplifiera le problème en résolvant d'abord la question suivante : l'accroissement d'hyperémittance est d'autant plus grand que l'intensité est grande ; essayons

de trouver une famille de données initiales, où l'hyper-émittance H_e sera une fonction croissante de l'intensité, de telle façon que H_s soit une deuxième fonction de l'intensité qui se déduise simplement de la première.

Une première idée qui vient à l'esprit est de choisir H_e proportionnel à $\sqrt{I}$; on choisit ainsi 2 familles ; H_e désigne $E_x + E_y + E_l$ au début ; $H(1)$ désigne cette même quantité à la fin du premier temps. $H(2)$ est relatif à la fin du deuxième temps.

PREMIERE FAMILLE

i (mA)	E _x	et E _y	E _ℓ	H _e	H (1)	H (2)
3	1,73.10 ⁻⁷		8,65.10 ⁻⁸	3,08.10 ⁻⁷	3,85.10 ⁻⁷	4,51.10 ⁻⁷
10	3,16.10 ⁻⁷		1,58.10 ⁻⁷	5,62.10 ⁻⁷	1,03.10 ⁻⁶	1,23.10 ⁻⁶
25	5 .10 ⁻⁷		2,25.10 ⁻⁷	8,89.10 ⁻⁷	1,90.10 ⁻⁶	2,33.10 ⁻⁶
50	7,07.10 ⁻⁷		3,54.10 ⁻⁷	1,26.10 ⁻⁶	3,38.10 ⁻⁶	4,14.10 ⁻⁶
100	10 ⁻⁶		5 .10 ⁻⁷	1,78.10 ⁻⁶	5,76.10 ⁻⁶	6,45.10 ⁻⁶

DEUXIEME FAMILLE

i (mA)	E _x	et E _y	E _ℓ	H _e	H (1)	H (2)
3	1,73.10 ⁻⁷		3,46.10 ⁻⁷	5,80.10 ⁻⁷	6,76.10 ⁻⁷	8,08.10 ⁻⁷
10	3,16.10 ⁻⁷		6,32.10 ⁻⁷	1,06.10 ⁻⁶	1,53.10 ⁻⁶	1,82.10 ⁻⁶
25	5 .10 ⁻⁷		10 ⁻⁶	1,67.10 ⁻⁶	2,91.10 ⁻⁶	3,32.10 ⁻⁶
50	7,07.10 ⁻⁷		1,41.10 ⁻⁶	2,37.10 ⁻⁶	5,00.10 ⁻⁶	5,33.10 ⁻⁶
100	10 ⁻⁶		2 .10 ⁻⁶	3,35.10 ⁻⁶	8,09.10 ⁻⁶	8,09.10 ⁻⁶

Sur ces tableaux, H_e est différent de $E_x + E_y + E_l$; ceci tient aux définitions ; H_e est calculé par la méthode des valeurs quadratiques moyennes, tandis que E_x , E_y et E_l sont les données pour le calcul et représentent les enveloppes des émittances, et non leur valeur moyenne. Il y a, pour un mode de remplissage donné, un rapport constant entre les deux définitions. Pour la distribution pratique sur laquelle nous calculons, il y a égalité entre les deux définitions pour les projections en $W\phi$; pour les projections en xx' et yy' , la définition par les valeurs quadratiques donne des résultats plus petits dans un rapport $\frac{2}{3}$ (cf annexe, § III.3.).

Ces deux résultats sont représentés sous forme graphique en coordonnées logarithmiques sur les figures 22 et 23. On y remarque que $H(1)$ et $H(2)$ sont représentés par des droites plus inclinées que H_e , ce qui montre qu'on aurait intérêt à choisir H_e variant plus rapidement en fonction de l'intensité.

Dans une troisième famille, on choisit donc H_e proportionnel à l'intensité.

TROISIEME FAMILLE

i (mA)	E_x et E_y	E_l	H_e	$H(1)$	$H(2)$
3	$6 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$1,33 \cdot 10^{-7}$	$2,72 \cdot 10^{-7}$	$3,36 \cdot 10^{-7}$
10	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$4,41 \cdot 10^{-7}$	$1,01 \cdot 10^{-6}$	$1,25 \cdot 10^{-6}$
25	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$1,10 \cdot 10^{-6}$	$2,26 \cdot 10^{-6}$	$2,70 \cdot 10^{-6}$
50	10^{-6}	10^{-6}	$2,22 \cdot 10^{-6}$	$4,43 \cdot 10^{-6}$	$4,94 \cdot 10^{-6}$
100	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$4,40 \cdot 10^{-6}$	$8,42 \cdot 10^{-6}$	$8,97 \cdot 10^{-6}$

Ces résultats sont représentés sur la figure 24 cette fois, les droites représentatives de H (1) et H (2) sont parallèles à la droite représentative de H_e .

On en déduit immédiatement des renseignements sur la fonction f cherchée. Si H_e varie proportionnellement à i , H_s varie proportionnellement à H_e ; $\frac{H_s}{H_e}$ n'est donc fonction que de $\frac{H_e}{i}$:

$$H_s = H_e f \left(\frac{H_e}{i} \right)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\frac{H_s - H_e}{H_e} = g \left(\frac{H_e}{i} \right)$$

où g désigne une autre fonction ; nous désignerons par G :

$$G = \frac{H_s - H_e}{H_e}$$

le coefficient d'augmentation relative de l'hyperémittance ; comme $\frac{H_e}{i}$ représente l'inverse d'une brillance, on peut énoncer le résultat suivant :

L'augmentation relative de l'hyperémittance n'est fonction que d'une valeur moyenne de la brillance dans chacun des 3 plans de phase.

Dans la troisième famille $\frac{H_e}{i} = 4,4.10^{-5}$ m.radian/A, et $G = 0,9$ ou $1,4$ suivant qu'on s'arrête à la fin du premier temps ou du deuxième temps.

Maintenant que l'on a ramené le problème de 3 variables H_e , H_s , i à 2 seulement, G et $\frac{H_e}{i}$, on peut poursuivre en explorant les plages utiles de i , E_x et E_y , et E_ℓ , et en portant les résultats sur un graphique. Les plages utiles seront bornées d'un côté par le désir de ne pas perdre de particules en cours d'accélération (ce qui fausse l'évaluation de l'hyperémittance) et de l'autre par l'impossibilité pratique de mesurer des G trop petits. Le tableau figure 25 donne les résultats de ces calculs ; comme partout ailleurs, les émittances sont données en mètres.radians normalisés ; (1) signifie à la fin du premier temps ; (2) à la fin du second temps. On vérifie bien que H croît beaucoup dans le premier temps, et peu ou pas dans le second.

Les plages d'exploration portent sur deux décades pour $\frac{H_e}{i}$ et E_ℓ , et sur une décade pour E_x et E_y . Si maintenant on porte sur un graphique en coordonnées logarithmiques les résultats trouvés pour G et $\frac{H_e}{i}$, on obtient la figure 26. Nous cherchions une courbe et nous trouvons un nuage de points qui se distribuent autour d'une droite de pente - 1. Les points sont près de la droite dans la région où G est grand (grande augmentation d'hyperémittance) ; le nuage est plus diffus dans la région où G est petit ; ceci n'est pas étonnant car il est spécialement difficile de mesurer les faibles augmentations d'émittances. Les points, représentent les valeurs à la fin du temps 1, les croix + sont relatives à la fin du temps 2 ; les signes 0 et * représentent les résultats relatifs à la famille 3 aux temps 1 et 2.

Pour obtenir la relation cherchée entre H_e , H_s et i , il nous suffit maintenant d'écrire l'équation de la droite. D'après la figure, on trouve :

$$\log G = - \log \frac{H_e}{i} + \log 6.10^{-5}$$

soit encore :

$$\log \frac{H_s - H_e}{H_e} = - \log \frac{\frac{H_e}{i}}{6.10^{-5}}$$

en désignant à nouveau par H_s , hyperémittance de sortie, une valeur moyenne pendant le second temps. On arrive ainsi à la relation extrêmement simple :

$$H_s = H_e + 6.10^{-5} i$$

Plusieurs commentaires s'imposent à ce stade. Tout d'abord, il est remarquable de trouver une loi aussi simple comme aboutissement de calculs numériques sophistiqués. Ensuite, on voit clairement que l'accélérateur linéaire ne se comporte pas du tout comme un multiplicateur d'émittance ; bien au contraire, il transforme du courant en hyperémittance, qui vient s'ajouter à l'hyperémittance de départ ; en ce sens, c'est un générateur d'émittance. Enfin, le coefficient de proportionnalité, qui se trouve être ici 6.10^{-5} m.rd normalisés/ampère, dépend de l'accélérateur considéré, et pour un accélérateur donné, de la loi de focalisation dans le premier temps de l'évolution de l'hyperémittance ; en augmentant le courant dans les premiers quadrupoles, on diminuerait vraisemblablement ce coefficient.

II.4. CONCLUSION

Au cours de cette étude particulière, nous avons dégagé un certain nombre d'effets de la charge d'espace. La tendance à l'égalisation des vitesses quadratiques moyennes, la découverte d'une combinaison H des émittances qui croît d'abord rapidement puis reste quasi constante, la forme de la loi de croissance de H en fonction du courant, sont des résultats trop simples pour n'être applicables qu'au seul accélérateur linéaire sur lequel nous avons effectué les calculs. Leur simplicité même est le garant de leur généralité.

Une fois ces mécanismes établis, on aimerait sans doute préciser certains points qui restent dans l'ombre au terme de cette étude ; en calculant dans d'autres conditions, sur d'autres accélérateurs, on devrait pouvoir déterminer si la meilleure combinaison H des émittances est bien leur somme, ou s'il vaut mieux prendre leur produit, ou autre chose. La question du mode de focalisation mériterait aussi d'être approfondie ; le choix du mode $+-+$ au lieu du mode $++-$ permettrait sans doute de diminuer sensiblement le coefficient de proportionnalité entre le courant et l'hyperémittance ; de combien ? Ces questions resteront malheureusement sans réponse dans le cadre de cette étude, qui s'est surtout attachée à forger des outils d'investigation et à dépister les mécanismes généraux de la charge d'espace dans les accélérateurs linéaires à protons, sans pour autant épuiser son sujet.

ANNEXE : EMITTANCES

I - Les INVARIANTS

Il est inutile d'insister sur l'importance de disposer de quantités globales permettant de caractériser un faisceau de particules ; ces quantités sont d'autant plus intéressantes si elles sont accessibles à l'expérience, et restent invariantes au cours du processus d'accélération. Outre les charges transportées (ou le courant accéléré), l'émittance dans certaines conditions présente ces caractéristiques ; nous reviendrons sur la définition de l'émittance au § II. Indiquons seulement pour l'instant que l'émittance peut caractériser l'aptitude d'un faisceau à passer dans un canal donné. Rappelons tout d'abord ce que nous apprend la mécanique analytique ; on pourra consulter à ce sujet les ouvrages :

- H. POINCARÉ
"Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste"
(Gauthier-Villars 1892) Tome I, p. 166 et 193
- H. GOLDSTEIN
"Classical Mechanics"
(Addison-Wesley) p. 247
- L. LANDAU et E. LIFCHITZ
"Mécanique"
(Editions de la Paix, Moscou)
p. 204 de l'édition en Français

Une particule dépend de 3 coordonnées q_1, q_2, q_3 (par exemple x, y, z , coordonnées cartésiennes) ; soient p_1, p_2, p_3 les moments conjugués ; dans l'espace à 6 dimensions $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$, dit espace des phases, une particule est représentée, à un instant donné, par un point ; au cours du temps, ce point se déplace, décrivant une "trajectoire de phase". Un ensemble de particules est représenté par un ensemble de points dans l'espace des phases. L'intérêt de cet espace est que la connaissance d'un point représentatif d'une particule à un instant donné détermine toute l'histoire passée et future de cette particule ; ceci est bien naturel : les lois de la dynamique conduisant à des équations différentielles du 2ème ordre, la connaissance de 2 valeurs initiales par degré de liberté détermine parfaitement toute la trajectoire.

On démontre que les intégrales :

$$I_1 = \iiint\iiint dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 dq_3 dp_3$$

$$I_2 = \iiint\iiint \left(dq_1 dp_1 dq_2 dp_2 + dq_2 dp_2 dq_3 dp_3 + dq_3 dp_3 dq_1 dp_1 \right)$$

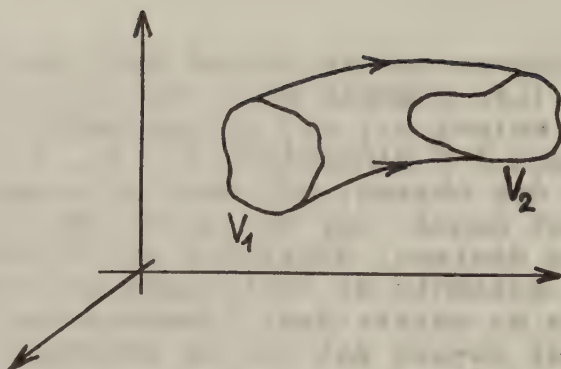
$$I_3 = \iiint \left(dq_1 dp_1 + dp_2 dq_2 + dp_3 dq_3 \right)$$

sont invariantes au cours de toute transformation canonique. (Ce résultat est général, dans un système dépendant de n coordonnées on pourrait définir n invariants).

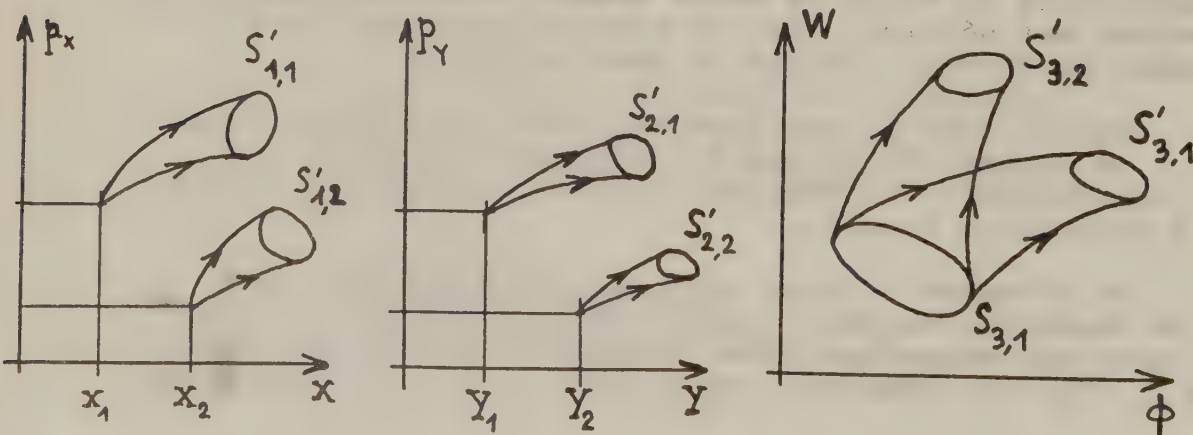
Encore faut-il préciser les domaines d'intégration ; ce sont : un élément de volume à 6 dimensions pour I_1 , un élément de surface à 4 dimensions pour I_2 , un élément de surface à 2 dimensions pour I_3 .

On démontre d'autre part que les variations des p et q au cours du mouvement peuvent être elles-mêmes considérées comme une transformation canonique. Il s'ensuit donc que les I_1, I_2, I_3 , sont des constantes au cours du mouvement.

Soit donc un nuage de particules contenues à l'instant t_1 dans un volume V_1 de l'espace des phases à 6 dimensions ; à l'instant t_2 les particules seront contenues dans un volume V_2 ; d'après l'invariant I_1 , $V_2 = V_1$; le volume de phase est une constante ; le nombre de particules l'étant aussi, la densité en phase est également constante ; c'est le bien connu théorème de Liouville ; il est exposé ici sous sa forme rigoureuse, mais peu utile car il est pratiquement impossible de mesurer un volume à 6 dimensions ; ce qu'on sait mesurer, ce sont des projections de ce volume sur les plans q_1p_1, q_2p_2, q_3p_3 ; plans auxquels fait bien appel l'invariant I_3 ; malheureusement, cet invariant est relatif à des coupes, variétés à 2 dimensions taillées dans l'espace à 6 dimensions, et non pas à des projections.



Pour bien saisir la différence, prenons un exemple : supposons que nous injectons dans un accélérateur linéaire un pinceau défini par x_1, x'_1, y_1, y'_1 ; repérons cette variété à 2 dimensions dans les 3 plans x, p_x, y, p_y, W, ϕ ($p_x = \beta y x'$, et W et ϕ sont conjugués) ; dans les deux premiers plans, elle est représentée par un point, dans le troisième, par un petit domaine $S_{3,1}$.



En général, du fait des couplages, au bout d'un certain temps les 2 points représentatifs dans les 2 premiers plans deviennent deux domaines $S'_{1,1}$ et $S'_{2,1}$; le domaine $S_{3,1}$ devient $S'_{3,1}$; d'après l'invariant I_3 :

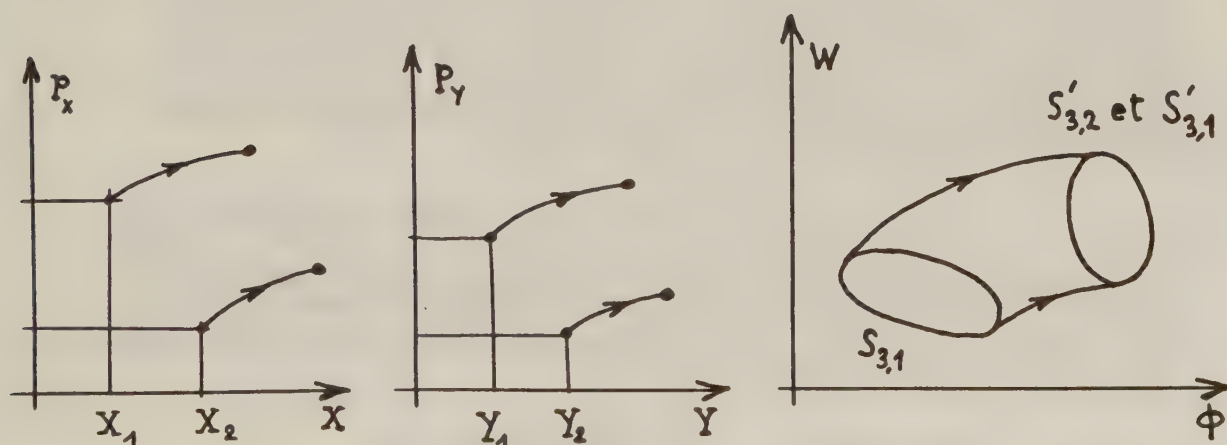
$$S_{3,1} = S'_{3,1} + S'_{2,1} + S'_{1,1}$$

Si on avait pris un autre pinceau x'_2, x'_2, y'_2 et le même domaine $S_{3,1}$ dans le plan W, ϕ , au bout du même temps on aurait obtenu $S'_{1,2}, S'_{2,2}, S'_{3,2}$

$$S_{3,1} = S'_{3,2} + S'_{2,2} + S'_{1,2}$$

Un faisceau réel est formé d'une quadruple infinité de tels pinceaux, occupant des domaines finis dans les 3 plans (projections) ; mais alors on ne peut plus rien dire de l'évolution de la somme de ces domaines.

Supposons maintenant qu'il n'y a pas de couplages ; les points représentatifs des pinceaux dans les 2 premiers plans restent des points, et l'évolution du domaine dans le plan $W\phi$ est indépendante du pinceau considéré.



$$S'_{3,2} = S'_{3,1} = S_{3,1}$$

Ceci reste vrai pour la quadruple infinité de pinceaux qui forme un faisceau réel ; dans ce cas les domaines se conservent dans chacun des plans de projection ; comme ces domaines sont accessibles à l'expérience (dans les deux premiers plans ce sont les émittances radiales classiques), on a tendance à appliquer le théorème de Liouville dans ces plans, à des projections ; ceci n'est valable qu'en l'absence de couplages ; si des couplages existent (c'est le cas de la charge d'espace), on assiste en général à une augmentation des émittances.

Quant à l'invariant I_2 , c'est le plus décevant des trois puisqu'il n'est ni facile à formuler, ni accessible à l'expérience.

II - DEFINITION des EMITTANCES

II.1. Introduction

Nous traiterons d'abord l'émittance radiale, la plus utilisée, celle qui permet de déterminer si un faisceau peut passer dans un système physique donné, caractérisé par son admittance (émittance du faisceau limite, au-delà de laquelle on perd des particules). Outre les différentes définitions possibles, par projection et par coupes, une difficulté vient du fait que les contours d'un faisceau ne sont jamais parfaitement définis ; la densité est en général grande au centre, et décroît vers les bords ; on devra donc préciser où on s'arrête, ou plutôt quel pourcentage de courant on prend ; un renseignement encore plus précis est la loi émittance en fonction du pourcentage.

On mesure d'habitude l'émittance en mètre x radian ; x ou y sont mesurés en mètre ; x' ou y', angles des trajectoires avec l'axe du faisceau sont mesurés en radian ; x et x' ne sont pas des variables conjuguées ; par contre, x et $\beta y x'$ le sont ; avec ces variables, l'émittance est dite normalisée ;

$$E_{\text{normalisé}} = \beta y E_{\text{non normalisé}}$$

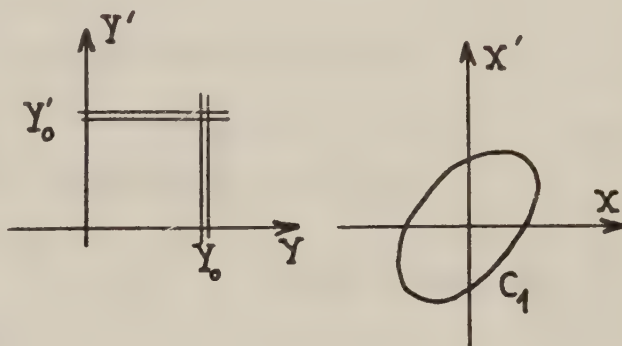
c'est l'émittance normalisée qui reste constante en l'absence de couplages.

II.2. Définition de l'émittance radiale

On mesure en général l'émittance radiale en interposant sur le trajet du faisceau des fentes au travers desquelles passe seulement le courant correspondant à un petit domaine du plan à examiner (par exemple xx') ; on doit alors préciser ce que l'on fait dans l'autre plan (yy') ; plusieurs attitudes sont possibles :

Définition par coupe

Nous nous intéressons ici à la distribution dans le plan xx' des particules ayant une valeur y_0 de y et une valeur y'_0 de y' .



L'émittance E_1 est définie de la façon suivante :

- soit C_1 une courbe sur laquelle :

$$\rho(x, x', y_0, y'_0) = A_1(y_0, y'_0) \quad (1)$$

- soit D_1 le domaine limité par C_1

$$\iint_{D_1(y_0, y'_0)} \rho(x, x', y_0, y'_0) dx dx' = K_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, x', y_0, y'_0) dx dx' \quad (2)$$

K_1 est le pourcentage du courant dans le domaine D_1 rapporté au courant total (pour $y = y_0, y' = y'_0$)

$$E_1(K_1, y_0, y'_0) = \iint_{D_1(y_0, y'_0)} dx dx' \quad (3)$$

Définition par projection

Nous nous intéressons ici à la distribution dans le plan xx' de toutes les particules, quels que soient leurs y et y' .

Posons :

$$\rho_2(x, x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, x', y, y') dy dy' \quad (4)$$

- soit C_2 une courbe sur laquelle

$$\rho_2(x, x') = A_2 \quad (5)$$

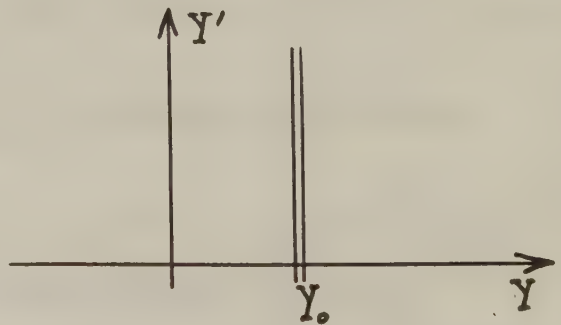
- soit D_2 le domaine limité par C_2

$$\iint_{D_2} \rho_2(x, x') dx dx' = K_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_2(x, x') dx dx' \quad (6)$$

$$E_2(K_2) = \iint_{D_2} dx dx' \quad (7)$$

Définition mixte

Nous nous intéressons ici à la distribution dans le plan xx' des particules ayant la valeur $y = y_0$, mais n'importe quelle valeur y' .



Posons :

$$\rho_3(x, x', y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, x', y_0, y') dy' \quad (8)$$

- soit C_3 une courbe sur laquelle :

$$\rho_3(x, x', y_0) = A_3(y_0) \quad (9)$$

- soit D_3 le domaine limité par C_3

$$\iint_{D_3(y_0)} \rho_3(x, x', y_0) dx dx' = K_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_3(x, x', y_0) dx dx' \quad (10)$$

$$E_3(K_3, y_0) = \iint_{D_3(y_0)} dx dx' \quad (11)$$

Remarquons que ρ_3 est relié à ρ_2 par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_3(x, x', y_0) dy_0 = \rho_2(x, x') \quad (12)$$

Relation entre E_2 et E_3

On ramènera l'équation (10) à l'équation (6) en l'intégrant de $-\infty$ à $+\infty$ par rapport à y_0 .

Le deuxième membre de (10) ne présente pas de difficultés à intégrer.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 K_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_3 (x, x', y_0) dx dx'$$

$$= K_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_2 (x, x') dx dx'$$

en intervertissant les ordres d'intégration et en tenant compte de (12).

Le premier membre de (10) ne s'intègre que si le domaine $D_3 (y_0)$ ne dépend pas de y_0 ; ce qui signifie que (9) doit être une identité en y_0 ; ceci implique que la fonction de distribution ait la forme particulière :

$$\rho_3 (x, x', y_0) = f (x, x') \cdot g (y_0) \quad (13)$$

On choisira alors :

$$A_3 (y_0) = \alpha g (y_0) \quad (14)$$

et la courbe C_3 aura pour équation :

$$f (x, x') = \alpha \quad (15)$$

Dans ces conditions, (10) devient, une fois intégré :

$$\iint_{D_3} f (x, x') dx dx' = K_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f (x, x') dx dx' \quad (16)$$

Dans ces mêmes conditions, (12) s'écrit :

$$f(x, x') \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_0) dy_0 = \rho_2(x, x') \quad (17)$$

et (16) devient :

$$\iint_{D_2} f(x, x') dx dx' = K_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x') dx dx' \quad (18)$$

Nous choisirons des domaines D_2 et D_3 identiques ; d'après (5), (15) et (17) :

$$A_2 = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} g(y_0) dy_0$$

La comparaison de (16) avec (18) montre que $K_2 = K_3$; d'après (7) et (11), et pour des fonctions de distribution du type (13), $E_2 = E_3$.

Relation entre E_1 et E_3

De la même façon, en intégrant (2) de $-\infty$ à $+\infty$ par rapport à y'_0 , on va retrouver (10).

On voudra ici que $D_1(y_0, y'_0)$ soit indépendant de y'_0 , et identique à $D_3(y_0)$; d'après (1), qui doit être une identité en y'_0 , y_0 étant un paramètre, la fonction de distribution doit avoir la forme particulière :

$$\rho(x, x', y_0, y'_0) = \phi(x, x', y_0) \psi(y_0, y'_0)$$

$$\text{On choisira : } A_1(y_0, y'_0) = \beta \psi(y_0, y'_0)$$

(1) s'écrit alors :

$$\phi(x, x', y_0) = \beta$$

d'après (8) :

$$\phi_3(x, x', y_0) = \phi(x, x', y_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y_0, y'_0) dy'_0$$

et d'après (9), le choix de

$$A_3(y_0) = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y_0, y'_0) dy'_0$$

assure l'identité de D_1 avec D_3 .

(2) devient alors, une fois intégré en y'_0 :

$$\iint_{D_1(y_0)} \phi(x, x', y_0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y_0, y'_0) dy'_0 \right] dx dx'$$

$$= K_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, x', y_0) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y_0, y'_0) dy'_0 \right] dx dx'$$

qui n'est autre que (10), avec $K_3 = K_1$.

Dans ces conditions, $E_1 = E_3$.

Relation entre E_1 et E_2

On montrerait de la même façon que pour ramener (2) à (6), D_1 doit être indépendant de y_0 et y'_0 , et que donc ρ doit être de la forme :

$$\rho(x, x', y, y') = S(x, x') T(y, y')$$

Dans ces conditions,

$$E_1 = E_2 \quad (= E_3)$$

Définition pratique

Il s'avère malheureusement que suivant le laboratoire, suivant les dispositifs de mesure existants, c'est soit E_1 , E_2 , ou E_3 que l'on baptise émittance ; les définitions ne sont équivalentes que pour certains types de distributions précisés ci-dessus. Il convient donc, avant de comparer des émittances, de définir soigneusement de quoi on parle.

II.3. Exemples d'émittances pour quelques distributions

Faisceau dit "à densité constante"

Au niveau de la source, tous les points de celle-ci ayant les mêmes propriétés et l'angle sous lequel les protons sont émis ayant une origine thermique, la densité peut s'écrire :

$$\rho = e^{-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)} T(a^2 - x^2 - y^2)$$

$$\text{où } T(a^2 - x^2 - y^2) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x^2 + y^2 > a^2 \\ 1 & \text{pour } x^2 + y^2 < a^2 \end{cases}$$

On retrouve une même forme de densité en tout point d'enjambement, tandis que la densité n'est plus constante dans le plan xy , en un point quelconque de l'axe du faisceau (c'est là la différence avec la distribution de Kapchinskii Vladimirskii, qui reste constante en tout point de l'axe au prix d'un peuplement de l'espace de phase sur la surface d'un hyperellipsoïde).

Cette densité satisfait à la condition

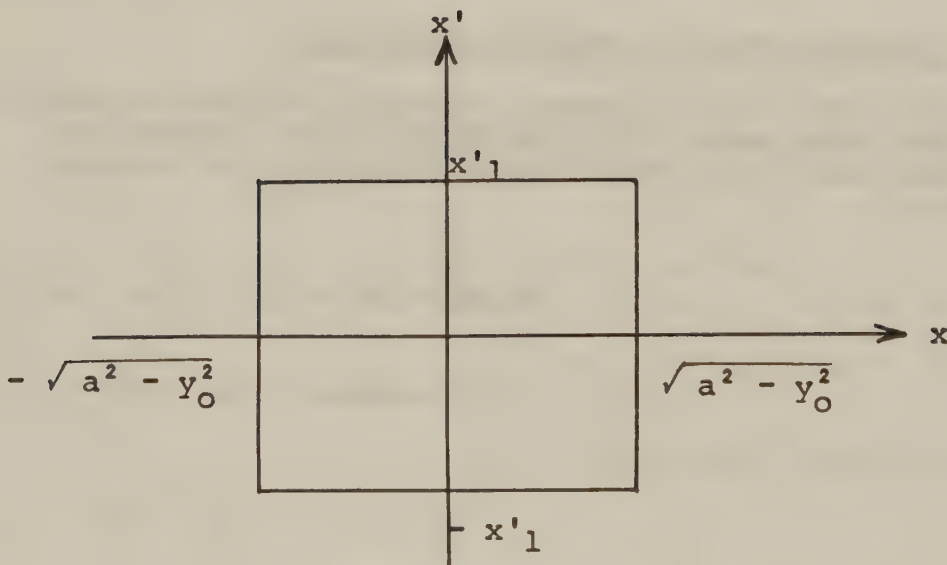
$$\rho(x, x', y, y') = \phi(x, x', y) \psi(y, y')$$

donc :

$$E_1 = E_3$$

Le calcul direct est aisé :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dx \, dx' &= e^{-y'^2_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x'^2} \, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(a^2 - x^2 - y_0^2) \, dx \\ &= 2 e^{-y'^2_0} \sqrt{\pi} \sqrt{a^2 - y_0^2} \end{aligned}$$



$$\iint_{D_1} \rho \, dx \, dx' = e^{-y_0'^2} \int_{-x_1'}^{x_1'} e^{-x'^2} \, dx' \int_{-\sqrt{a^2 - y_0'^2}}^{+\sqrt{a^2 - y_0'^2}} \tau (a^2 - x^2 - y_0'^2) \, dx$$

$$= 2 e^{-y_0'^2} \sqrt{\pi} \sqrt{a^2 - y_0'^2} \, \Theta(x_1')$$

où $\Theta(x_1')$ est la fonction d'erreur

$$\Theta(x_1') = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_1'} e^{-t^2} \, dt$$

il vient :

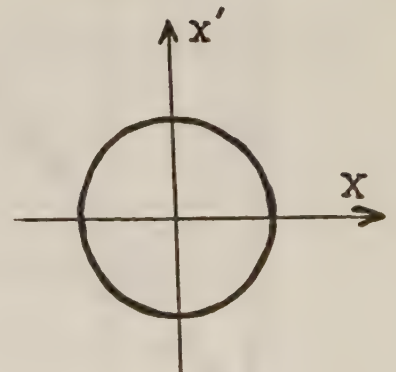
$$K = \Theta(x_1')$$

$$E_1 = 4 \sqrt{a^2 - y_0'^2} \, \Theta^{-1}(K)$$

Le calcul direct de E_3 redonnerait la même expression, tandis que E_2 aurait une expression différente (voir courbe sur la figure ci-après).

Faisceau à densité gaussienne

$$\rho = e^{-(x'^2 + y'^2 + x^2 + y^2)}$$



$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3$; ceci reste vrai en dehors d'un point d'enjambement, pourvu que les mouvements en x et y soient découplés.

Calculons l'émittance :

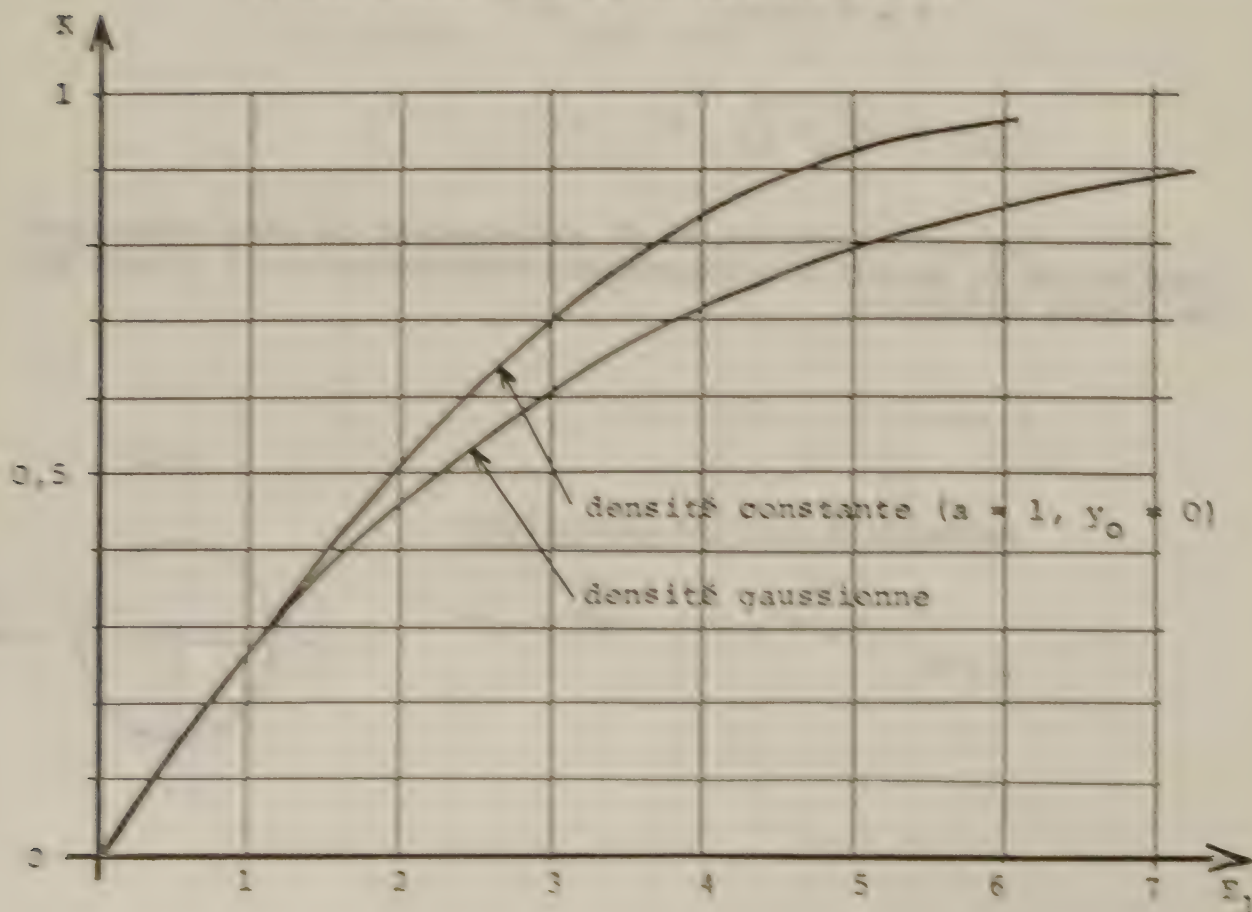
$$\iint_{D_1} \rho \, dx \, dx' = e^{-(y^2 + y'^2)} 2\pi \int_0^a r e^{-r^2} dr$$

$$= e^{-(y^2 + y'^2)} \pi (1 - e^{-a^2})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dx \, dx' = e^{-(y^2 + y'^2)} \pi$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\kappa} &= (1 - e^{-a^2}) \\ \Sigma_1 &= \pi a^2 \end{aligned} \right\} \quad \Sigma_1 = \pi \ln \frac{1}{1 - \bar{\kappa}}$$

(Voir courbe sur la figure ci-après)



II.4. Définition de l'émittance longitudinale

L'émittance longitudinale est une notion peu utilisée pratiquement ; ici toutefois, elle prend une grande importance à cause des transferts entre émittance radiale et émittance longitudinale. L'émittance longitudinale sera définie comme étant la surface d'un domaine dans le plan W, ϕ ; encore faut-il l'exprimer dans les mêmes unités que l'émittance radiale.

Emittance radiale : elle est obtenue par le produit d'une distance x par la variable conjuguée $\beta \gamma x'$; or $x' = \frac{v_r}{v_z}$, rapport des vitesses radiale et longitudinale ; on arrive ainsi au produit de x par $\gamma \frac{v_r}{c}$ (puisque $v_z = \beta c$).

L'émittance longitudinale sera obtenue par le produit d'une distance Δz , distance d'une particule à la particule centrale du paquet, par $\gamma \frac{\Delta v_z}{c}$, Δv_z étant la différence entre la vitesse longitudinale de la particule considérée et la vitesse longitudinale de la particule centrale.

$$E_l = \iint \frac{\gamma}{c} d(\Delta z) d(\Delta v_z)$$

comme :

$$\Delta v_z = \frac{\Delta W}{m_0 c \beta}$$

$$E_l = \iint \gamma \frac{d(\Delta z) d(\Delta W)}{m_0 c^2 \beta}$$

III - Les EMITTANCES dans MAPRO 2

III.1. Emittances

Ce qu'on connaît dans le programme, ce sont les coordonnées des particules, dont le nombre peut aller jusqu'à 5 000, mais reste limité à 500 dans la plupart des calculs effectués. Un premier point est clair : les émittances dont il est question dans le programme sont des projections et non des coupes. (Il ne serait pas impossible de définir des émittances coupes, mais le nombre de particules par coupe tomberait à pas grand chose). On aurait pu envisager de chercher sur ces projections les lignes équidensité, et tracer ainsi les courbes émittance-courant ; ceci a d'ailleurs été fait, sur quelques sorties, à l'aide d'un programme écrit au CERN par le Dr D.J. WARNER, EMITNC [37].

Mais, pour des questions de rapidité (deux fois par cellule on calcule 2 émittances radiales et une émittance longitudinale) et aussi pour des questions de simplicité, on définit (rejoignant en ceci Mrs CHASMAN [27]) l'émittance par :

$$A = 4 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}$$

$$\text{où} \quad \sigma_1^2 = \frac{\sum x^2}{N}, \quad \sigma_2^2 = \frac{\sum x'^2}{N}, \quad \rho^2 = \frac{(\sum x x')^2}{\sum x^2 \sum x'^2}$$

c'est-à-dire :

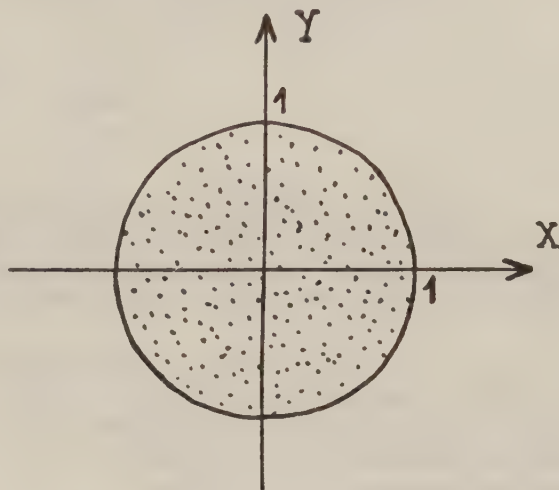
$$A = \frac{4}{N} \sqrt{\sum x^2 \sum x'^2 - (\sum x x')^2}$$

Les sommes sont étendues sur le nombre N de particules sur lesquelles on calcule effectivement. L'émittance en yy' se calcule de même ; pour l'émittance longitudinale, il faut commencer par centrer les variables avant d'appliquer la formule.

Une telle définition, qui utilise les notions de moyenne quadratique, de coefficient de corrélation, empruntées aux méthodes statistiques, surprend de prime abord.

Mais elle donne des résultats voisins de ceux obtenus par la définition classique, pour les distributions de particules pratiques [38] ; l'accord serait très mauvais pour des faisceaux creux, ou des émittances très filamentées. Vérifions ceci sur un exemple.

Plaçons-nous dans le cas d'une distribution centrée, avec un coefficient de corrélation ρ nul, (on peut toujours s'y ramener), de densité uniforme unitaire à l'intérieur d'un cercle du plan xy , et nulle à l'extérieur. Raisonnons sur un quart de cercle.



$$A = \frac{4}{N} \sqrt{\sum x^2 \sum y^2} = \frac{4}{N} \sum x^2$$

$$\sum x^2 = \int_{-1}^{+1} 2 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$N = \iint dx dy = \pi$$

$$A = 1$$

Alors que l'émittance, telle qu'elle a été définie au § II, serait égale à π . Les émittances dont il est question dans MAPRO 2 sont donc des surfaces divisées par π . Comme elles sont ensuite normalisées dans le programme principal, il s'agit donc d'émittances normalisées divisées par π . Les émittances sont rangées dans les blocs EMX, EMY, EML.

III.2. Dimensions moyennes, vitesses moyennes

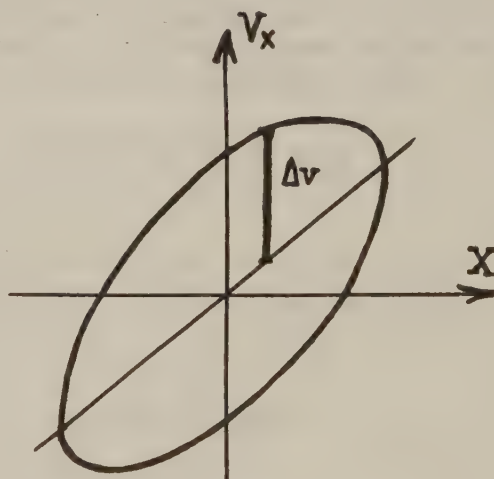
Les dimensions moyennes du faisceau, qu'il importe de surveiller au cours du calcul pour des questions d'adaptation, sont aussi calculées par des moyennes quadratiques.

Dimension moyenne en x :

$$2 \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}$$

Les dimensions moyennes sont rangées dans les blocs ENVX, ENVY, ENVPH (pour enveloppe) ; on définit aussi le rayon moyen du faisceau (RAV) par la moyenne géométrique des dimensions en x et en y.

Le dernier groupe de grandeurs qu'il s'est avéré utile de définir dans MAPRO 2 a trait aux vitesses moyennes. Ce ne sont pas exactement les vitesses moyennes, qui oscillent en permanence à cause de la focalisation quadrupolaire, mais une valeur quadratique moyenne de l'écart de vitesse par rapport à la vitesse moyenne ; plus clairement, c'est la valeur quadratique moyenne de la quantité noté Δv sur la figure ; plus précisément, c'est une quantité proportionnelle à la racine de :



$(x' - Kx)^2$ en choisissant K pour que cette expression soit minimale.

$$\overline{(x' - Kx)^2} = \overline{x'^2} - 2K \overline{xx'} + K^2 \overline{x^2}$$

Cette expression est minimale pour $K = \frac{\overline{xx'}}{\overline{x^2}}$

et alors :

$$(\overline{x'} - Kx)^2 = \overline{x'^2} - \frac{(\overline{xx'})^2}{\overline{x^2}}$$

Or, l'émittance telle qu'elle a été définie plus haut peut encore s'écrire :

$$A = 4 \sqrt{\overline{x^2} \overline{x'^2} - (\overline{xx'})^2}$$

La quantité que nous cherchons à définir s'apparente de près à l'émittance divisée par la dimension du faisceau ; mais nous n'avons encore qu'un angle ; multiplions par v_z pour avoir la vitesse radiale ; en définitive :

$$\frac{\overline{v_x}}{c} = 2 \beta c \sqrt{\overline{x'^2} - \frac{(\overline{xx'})^2}{\overline{x^2}}}$$

$$\frac{\overline{\Delta v_z}}{c} = \frac{2}{m_0 c^2 \beta} \left[\overline{\Delta W^2} - \frac{(\overline{\Delta W \Delta \phi})^2}{\overline{\Delta \phi^2}} \right]$$

Pratiquement, dans le sous-programme CHAS, on range :

$$\sqrt{\overline{x^2} \overline{x'^2} - (\overline{xx'})^2} \quad \text{dans EMX}$$

$$2 \sqrt{\overline{x^2}} \quad \text{dans ENVX}$$

$$\sqrt{\overline{\Delta W^2} \overline{\Delta \phi^2} - (\overline{\Delta W \Delta \phi})^2} \quad \text{dans EML}$$

$$2 \sqrt{\overline{\Delta \phi^2}} \quad \text{dans ENVPH}$$

(Un terme tel que CCXXP, cross-correlation xx' , désigne ρ pour l'émittance en xx').

En fin de calcul, dans le programme principal :

$$\text{EMX contient : } \sqrt{x^2 x'^2 - (\overline{xx'})^2} \beta \gamma$$

EML reste inchangé

$$\text{T1 contient : } \frac{1}{4c} \sqrt{V_x^2}$$

$$\text{T2 contient : } \frac{1}{4c} \sqrt{V_y^2}$$

$$\text{T3 contient : } \frac{1}{4c} \sqrt{\Delta V_z^2}$$

$$\text{T4 contient : } \frac{1}{4c} \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Ce n'est que pour l'impression que les émittances et les vitesses moyennes sont multipliées par 4, pour satisfaire aux définitions données ci-dessus.

III.3. Emittance pour la distribution pratique

Ce paragraphe traite de la distribution pratiquement utilisée : uniforme en $W\phi$ à l'intérieur d'une ellipse, et uniforme en $xx'yy'$ à l'intérieur d'un hyperellipsoïde ; en projection sur le plan xx' , une telle distribution n'est pas uniforme, et il n'y a plus identité entre les deux définitions de l'émittance : surface délimitée par la courbe limite du domaine divisée par π , (qui est utilisée pour les données de MAPRO 2), et la définition par moyennes quadratiques (qui est utilisée pour les résultats de MAPRO 2, cf. chapitre résultats, § II.3.4.).

Toutefois, il y a entre les résultats avec les deux définitions un rapport constant que nous allons calculer (ce serait 1 pour une distribution uniforme, cf § III.1. de ce chapitre).

En projection sur le plan $W\phi$, la distribution est uniforme et les deux définitions donnent le même résultat.

En projection sur le plan xx' , la distribution est parabolique, comme on peut le constater facilement en intégrant en yy' , ou en consultant [21], où l'on montre que :

$$\frac{d}{dt} \rho_2(t) = -\pi \rho_4(t)$$

où ρ_2 et ρ_4 sont les distributions à 2 et 4 dimensions, à l'intérieur de cercles et d'hypersphères et :

$$t = r^2 = x^2 + y^2$$

puisque $\rho_4 = 1$, on en tire immédiatement :

$$\rho_2 = \frac{\pi}{4} (1 - r^2)$$

Calculons maintenant l'expression :

$$A = \frac{4}{N} \sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}$$

Comme au § III.1. nous raisonnons à l'intérieur d'un cercle et :

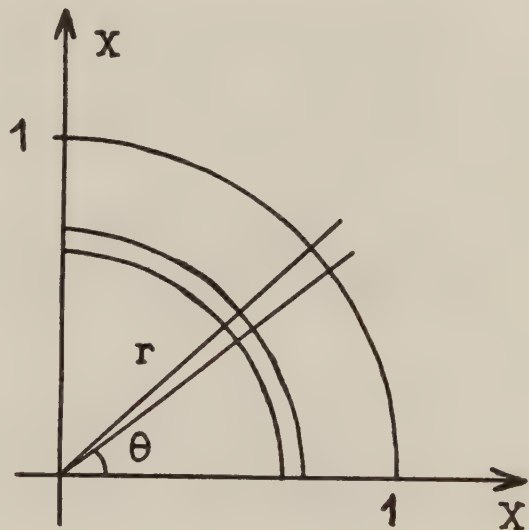
$$A = \frac{4}{N} \Sigma x^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} (1 - r^2) r d\theta \\ \Sigma x^2 = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{4} (1 - r^2) r^2 \cos^2 \theta r d\theta \end{array} \right.$$

On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{2} \\ \Sigma x^2 = \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{12} \end{array} \right.$$

et $A = \frac{2}{3}$



tandis que l'aire du cercle divisée par π égale 1.

La définition par les valeurs quadratiques donne des résultats plus petits dans le rapport $\frac{2}{3}$.

R E M E R C I E M E N T S

Je tiens ici à remercier Monsieur LEVY-MANDEL, chef du Département du Synchrotron Saturne et Monsieur GOUTTEFANGEAS, chef du Service d'Entretien et du Fonctionnement de Saturne, sans les idées et les encouragements desquels cette thèse n'aurait pas vu le jour.

Monsieur LAPOSTOLLE a, par ses conseils constants, permis à cette étude de se frayer son chemin ; inspirateur de bon nombre des idées originales présentées ici, qu'il en soit chaleureusement remercié.

La partie centrale de ce travail porte l'empreinte profonde de Monsieur MARTINI, puisqu'elle résulte d'une collaboration avec lui ; qu'il en soit ici remercié, ainsi que Mrs. CHASMAN, dont les résultats précédents ont servi de points de départ à la dernière partie de cette étude.

Enfin de nombreuses personnes ont, au cours de discussions, influencé cette thèse ; il m'est agréable de citer parmi elles Messieurs R. GLUCKSTERN, C. TAYLOR, D. WARNER.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] B. SCHNIZER
"General properties of fields and beam dynamics
in a linac gap"
CERN 69-3 12 mars 1969
- [2] B. SCHNIZER
"Longitudinal and transverse T and S transit
time coefficients"
1968 Proton linear accelerator conference -
Brookhaven
- [3] M. MARTINI, M. PROMÉ, A. CHABERT, B. VEYRON
"Comparaison de deux méthodes d'étude de la dy-
namique des ions dans un accélérateur linéaire"
Congrès sur la physique et la production des
ions lourds -
La Plagne 1969
- [4] M. PROMÉ
"Design of a 20 MeV proton linear accelerator,
new injector for Saturne"
1966 Linear accelerator conference - Los Alamos
- [5] M. MARTINI, D. WARNER
"Numerical calculations of linear accelerator
cavities"
CERN 68-11 22 mars 1968

- [6] P. LAPOSTOLLE
"Champ et potentiel de charge d'espace produit
par un faisceau de section elliptique dans un
tube métallique également elliptique"
AR/Int - SG/65-27 (CERN) 11 novembre 1965
- [7] C. BOVET
"Solution d'un problème électrostatique"
MPS/DL Int. 65-13 (CERN) 25 octobre 1965
- [8] HOUSSAIS
"Calcul du champ créé par une distribution
exponentielle"
A paraître
- [9] I. KAPCHINSKII
"Répulsion coulombienne longitudinale des ions
dans un accélérateur linéaire pour les valeurs
limites de la densité phasique du faisceau"
Atomnaïa Energuia 1968
- [10] A. VLASOV
"Calcul de l'intensité du courant limite dans
un accélérateur linéaire de protons"
Atomnaïa Energuia 1969
- [11] B. BONDEREV, A. VLASOV
"Self consistant particle distribution and the
limit current in linear accelerators"
NTD 653 A (Academy of Sciences of USSR - Radio-
technical Institute)
- [12] P. LAPOSTOLLE
"Effets de la charge d'espace dans un accélérateur
linéaire à protons"
AR/Int. SG/65-15 (CERN) 15 juillet 1965
- [13] C. TAYLOR
"Space charge effects"
MPS/LIN - Note 68-6 (CERN) 18 octobre 1968

- [14] P. LAPOSTOLLE, C. TAYLOR, P. TETU, L. THORND AHL
"Intensity dependant effects and space charge
limit investigations on CERN linear injector
and synchrotron"
CERN 68-35 12 octobre 1968
- [15] C. TURNER, G. BENNETT
"Growth of phase space in high intensity proton
beams due to nonuniform radial charge distribu-
tion"
AADD-114 (Brookhaven) 28 juillet 1966
- [16] R. GLUCKSTERN
"Space charge effects in proton linear accelera-
tors"
AADD-121 (Brookhaven) 7 septembre 1966
- [17] I. KAPCHINSKII, A. KRONROD
"Space charge effect on phase oscillations of the
particles in ion linear accelerator"
N 176 (Institute for theoretical and experimental
physics of the USSR state committee on utilization
of atomic energy)
- [18] A. DAVIES
"Transverse, non linear, space charge effects in
rotationally symmetric electron and ion beams"
MPS/Int. LIN 69-12 (CERN) 6 avril 1969
- [19] P. TANGUY
"Etude des effets de charge d'espace dans des fais-
ceaux à densité non uniforme. Application à l'étude
des faisceaux à symétrie de révolution"
MPS/Int. LIN 69-11 (CERN) 24 avril 1969
- [20] P. LAPOSTOLLE
"Density distribution in intense beams"
ISR 300/LI/69-42 (CERN) 11 juillet 1969
VIIth International conference on high energy acce-
lerators, Yerevan 1969

- [21] P. LAPOSTOLLE
"Quelques relations entre des distributions de type hyperellipsoïdal dans des espaces à 2, 3, 4 et 6 dimensions"
ISR 300 LIN/66-32 (CERN) 26 octobre 1966
- [22] P. LAPOSTOLLE, B. LAPOSTOLLE
"Quelques propriétés des distributions de charge dans un système de focalisation"
ISR 300/LI/69-43 (CERN) 5 novembre 1969
- [23] I. KAPCHINSKII, V. VLADIMIRSKII
"Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator associated with the space charge"
International conference on high energy accelerators - CERN 1959
- [24] M. PROME
"Remarques sur l'accroissement d'émittance du fait de la charge d'espace"
SEFS TD 69/04 (Saclay) 29 janvier 1969
- [25] M. PROME
"Etude de quelques distributions de particules dans l'espace des phases ; application à la charge d'espace"
SEFS TD 69/36 (Saclay) 21 mai 1969
- [26] W. EADIE, M. MARTINI
"Statistical population of the linac beam transverse phase space"
MPS/Int. LIN 68/9 (CERN) 4 décembre 1968
- [27] R. CHASMAN
"Numerical calculations of the effects of space charge on six dimensional beam dynamics in proton linear accelerators"
1968 Proton linear accelerator conference - Brookhaven

- [28] R. CHASMAN
"Numerical calculations on transverse emittance growth in bright linac beams"
1969 Particle accelerator conference - Washington
- [29] J. STOVALL
"Comparison of two methods for calculating space charge effects in drift tube linacs"
MP-3-19 (Los Alamos) 22 janvier 1968
- [30] J. STOVALL
"Emittance growth in a 20 mA proton beam"
MP-3-52 (Los Alamos) 26 septembre 1968
- [31] M. MARTINI
"Computer simulation of linac beam dynamics with space charge"
MPS/LIN/69-20 (CERN) 9 décembre 1969
- [32] M. MARTINI, M. PROME
"Beam dynamics in a proton linac with space charge"
VIIth International conference on high energy accelerators - Yerevan 1969
- [33] P. LAPOSTOLLE
"Space charge problems in accelerators"
Lectures given in the academic training program of CERN 1968 - 1969
- [34] I. KAPCHINSKII
"Dynamique des particules dans les accélérateurs linéaires à ondes stationnaires"
Atomizdat Moscou 1966
- [35] P. LAPOSTOLLE, A. SEPTIER
"Linear accelerators"
North-Holland Publishing Company - Amsterdam 1970

- [36] F. VERMEULEN
"Computer simulation of beam bunching with the inclusion of space charge forces and quadrupole lenses"
MPS/Int. LIN/67-5 (CERN) 21 août 1967
- [37] C. TAYLOR, D. WARNER, F. BLOCK, P. TETU
"Progress report on the CERN-PS Linac"
1966 Linear accelerator conference - Los Alamos
- [38] P. LAPOSTOLLE
"Quelques propriétés essentielles des effets de la charge d'espace dans les faisceaux continus"
CERN ISR/DI 70-36
- [39] F. SACHERER
Communication verbale
- [40] P. LAPOSTOLLE
"Une distribution de charges stationnaire dans un système de focalisation continu"
ISR 300/LI/69-19 (CERN) 28 avril 1969
- [41] M. PROME
"Détermination de l'accélérateur linéaire de 20 MeV nouvel injecteur du synchrotron Saturne. Choix des paramètres électriques, dynamique des particules"
Rapport CEA R 3 261
- [42] T. EDWARDS
"Proton linear accelerator cavity calculations"
MURA report 622
- [43] D. SWENSON, D. YOUNG, B. AUSTIN
"Comparison of the particle motions as calculated by two different dynamics programs"
1966 linear accelerator conference - Los Alamos
- [44] L. SMITH, R. GLUCKSTERN
"Focusing in linear ion accelerators"
R.S.I. Vol. 26 n° 2 February, 1955

- [45] L. SMITH
"Linear Accelerators"
Handbuch der Physik - Vol. XLIV - Nuclear
Instrumentation 1 - Springer Verlag 1959
- [46] L. TENG
"Alternating gradient electrostatic focusing
for linear accelerators"
R.S.I. Vol. 25 n° 3 March, 1954
- [47] J. LIVINGOOD
"Principles of cyclic particle accelerators"
Van Nostrand 1961
- [48] E. COURANT, H. SNYDER
"Theory of the alternating-gradient synchrotron"
Annals of Physics 3, 1-48 (1950)

Manuscrit reçu le 25 mai 1971

PRESENTATION des FIGURES

I - Les figures 1 à 9 sont données à titre d'exemple d'exploitation du programme MAPRO2. Ces figures, sauf 3 et 4, sont relatives au run 70 03 11 02 11 02.

La figure 1 donne le remplissage adapté en YY' tandis que la figure 2 représente la densité en fonction de Y. Les figures 3 et 4 sont obtenues dans les mêmes conditions que 1 et 2, mais avec 4 000 particules au lieu de 500, nombre de particules prises en considération partout ailleurs.

La figure 5 représente le remplissage adapté en W ϕ .

Les figures 6 et 7 représentent la situation dans les plans YY' et W ϕ à la sortie de l'accélérateur.

Les figures 8 et 9 montrent les enveloppes du faisceau en X et en Y (les signes - représentent les bords des trous des tubes de glissement).

II - Les figures 10 à 21 présentent des résultats typiques destinés à illustrer le chapitre "Résultats".

La famille 10 à 13 est relative au run 70 03 11 02 11 02, dans lequel

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r,e} = 3,8.10^{-7} \\ E_{l,e} = 7,3.10^{-7} \\ i = 25 \text{ mA} \end{array} \right.$$

La famille 14 à 17 est relative au run
70 06 11 21 19 49 dans lequel

$$\begin{cases} E_{r,e} = 6.10^{-8} \\ E_{l,e} = 6.10^{-8} \\ i = 3 \text{ mA} \end{cases}$$

La famille 18 à 21 est relative au run
70 03 26 21 16 22 dans lequel

$$\begin{cases} E_{r,e} = 2.10^{-6} \\ E_{l,e} = 7,1.10^{-8} \\ i = 0 \text{ mA} \end{cases}$$

Dans chacune de ces familles, la première figure montre l'évolution du rayon moyen et de la longueur du paquet au cours de l'accélération (en abscisse on a porté pour toutes ces figures le numéro de la cellule). La deuxième figure montre l'évolution des émittances radiale et longitudinale. La troisième figure montre l'évolution des vitesses radiale et longitudinale. La quatrième figure montre l'évolution de l'hyperémittance H.

III - Les figures 22, 23 et 24 donnent les résultats obtenus pour les trois familles dont il est question dans le chapitre "Résultats", § II.3.4.

IV - Les figures 25 et 26 présentent l'ensemble des résultats obtenus, commentés dans le chapitre "Résultats".

NUMBER OF PARTICLES PLOTTED 500

V-AX. - .007

1.003

0.000

303

207

600.

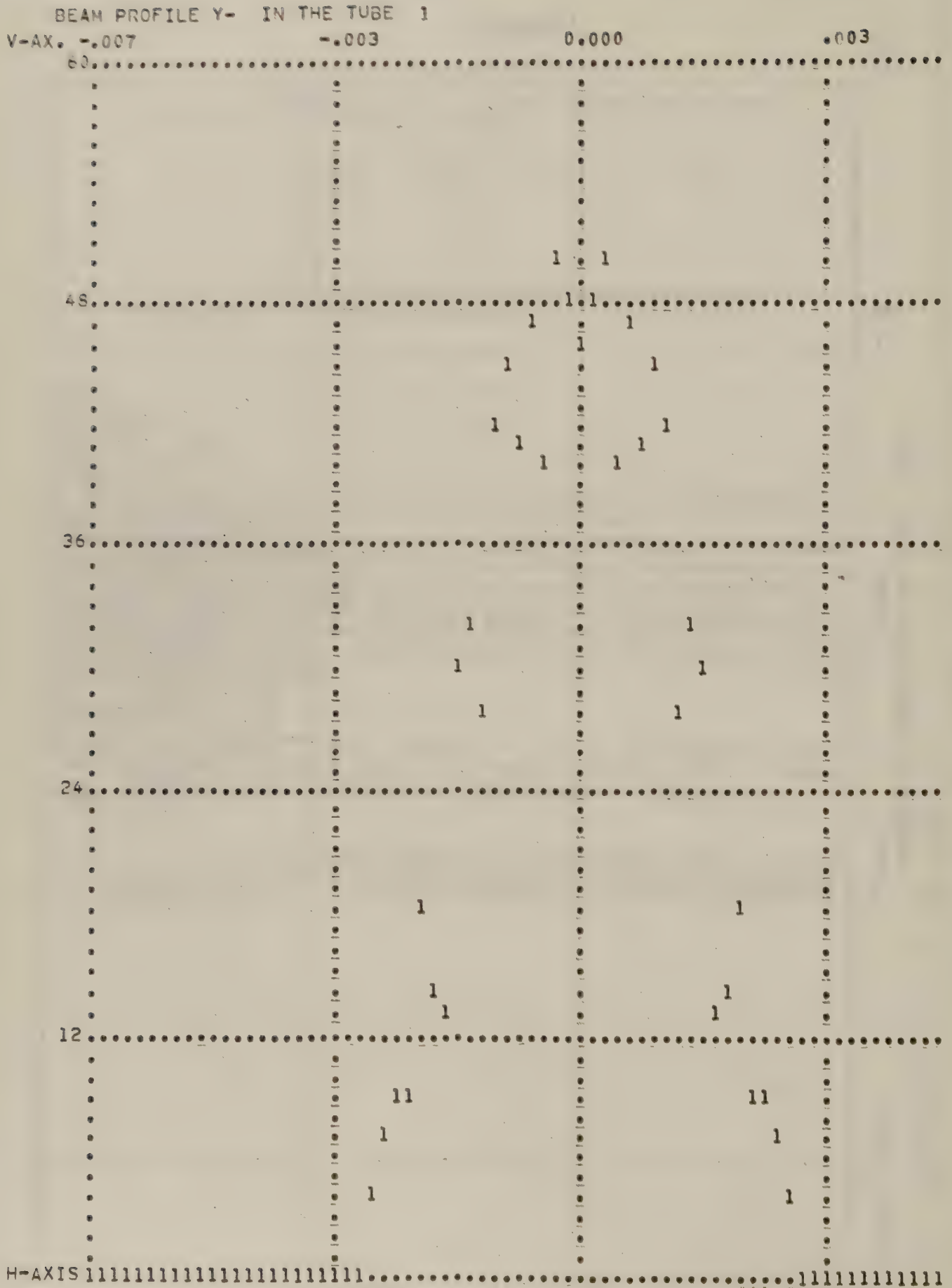
900.

0303

H-Axis

Figure 1

Figure 2



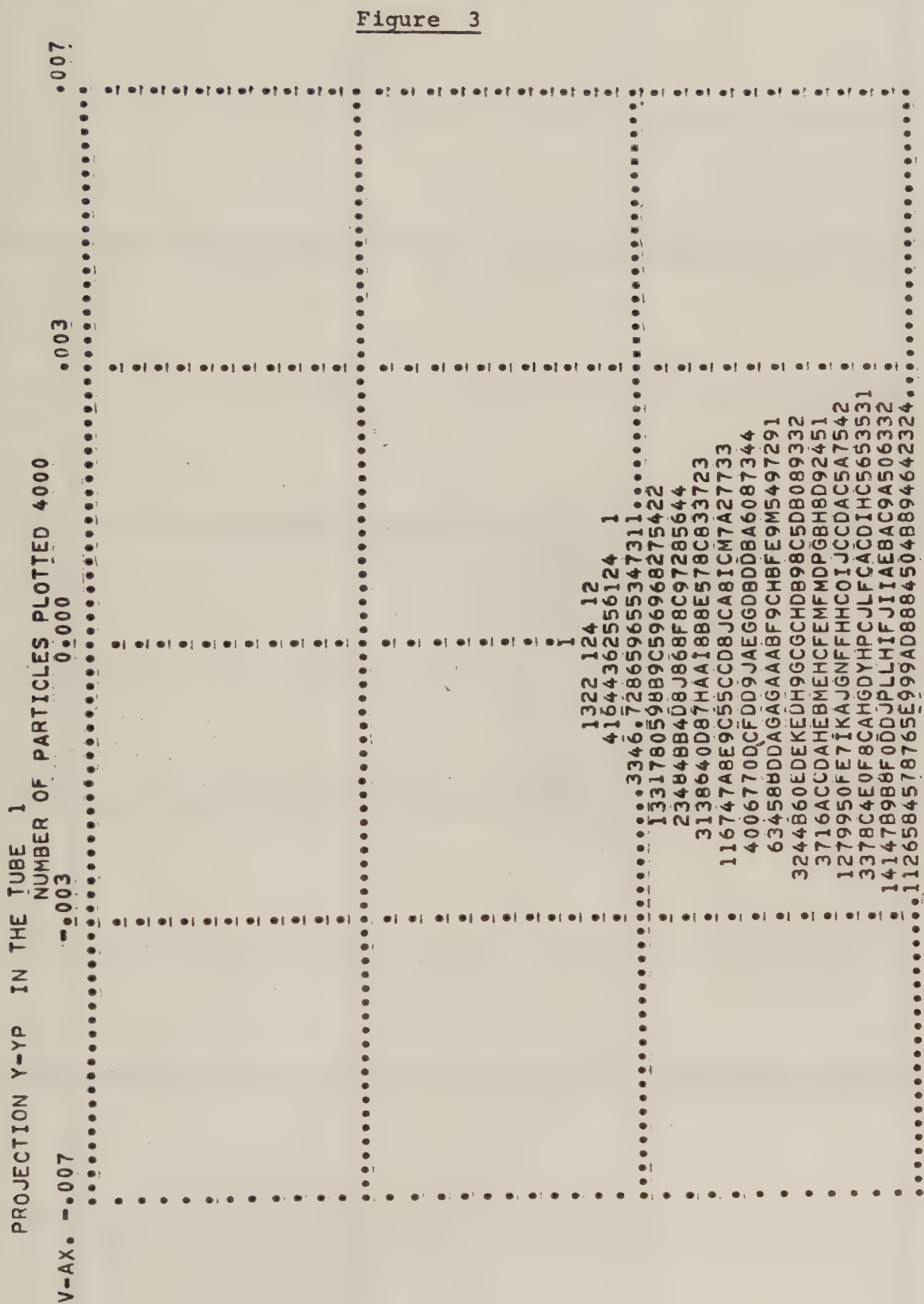


Figure 3

Figure 4

-003

0.000

003

390

312

234

156

78

H-AXIS 111111111111111111111111.....1111111111

PROJECTION PHDW IN THE TUBE 1

Figure 5

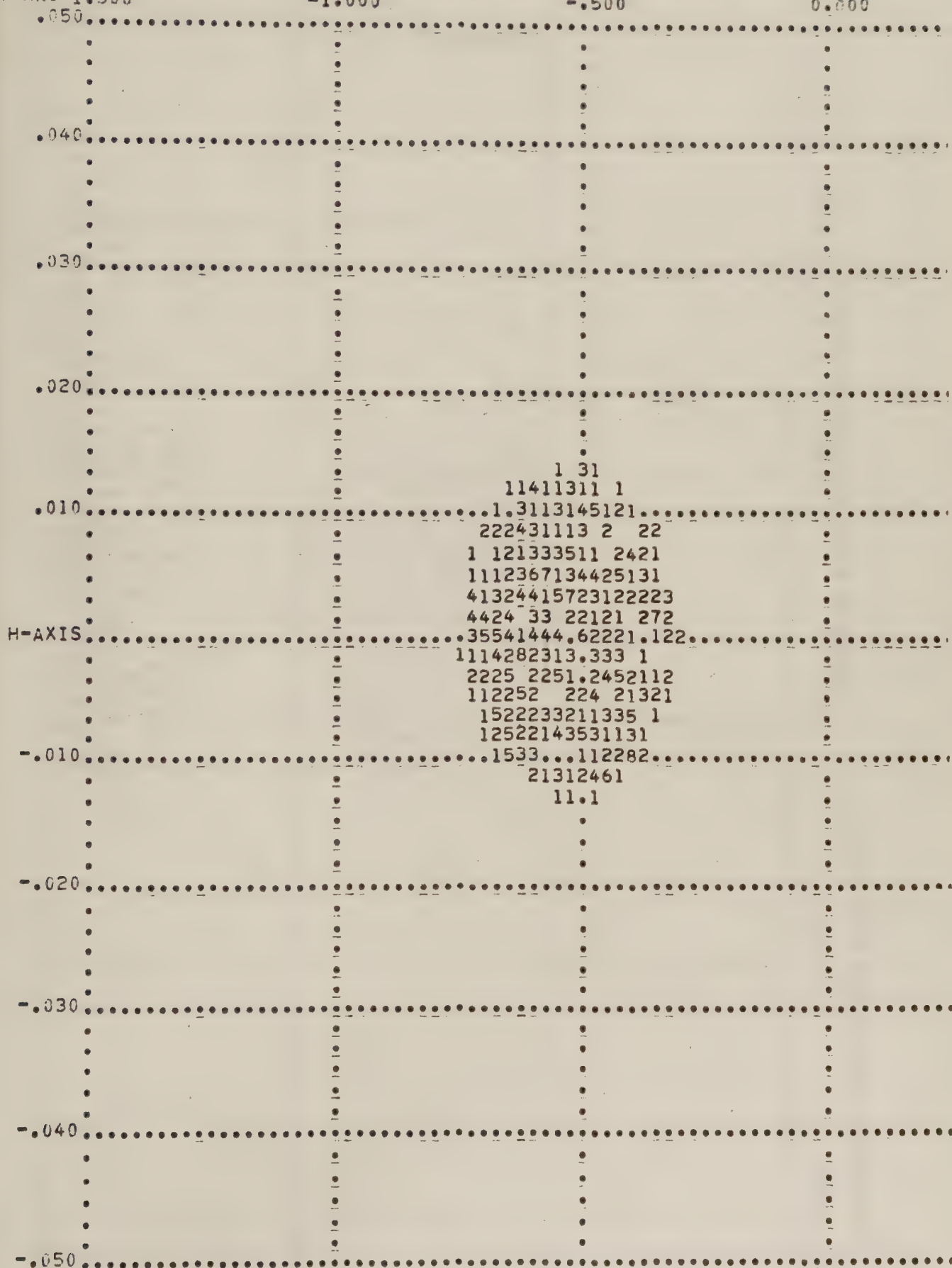
NUMBER OF PARTICLES PLOTTED 500

V-AX. -1.500

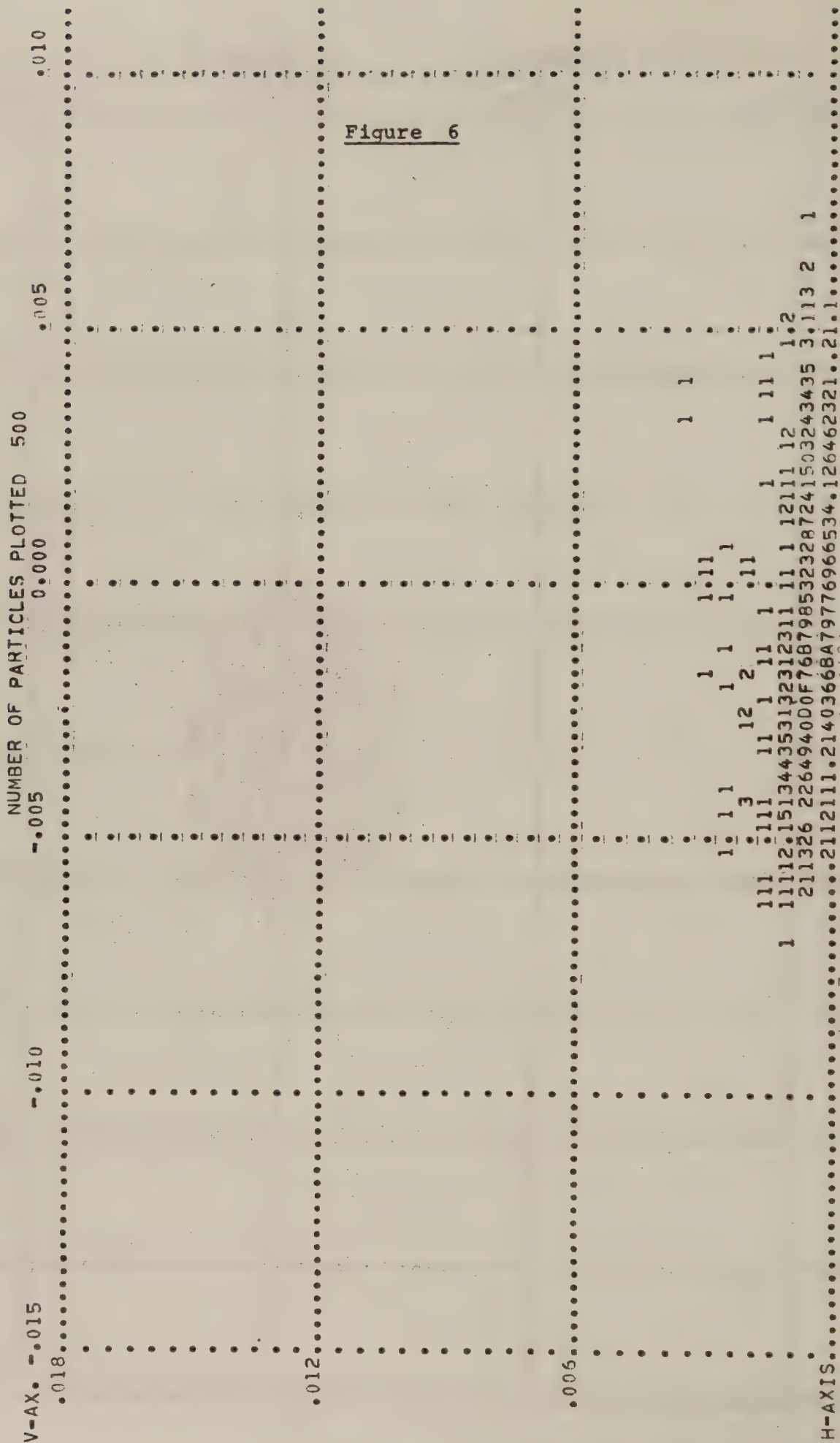
-1.000

-.500

0.000

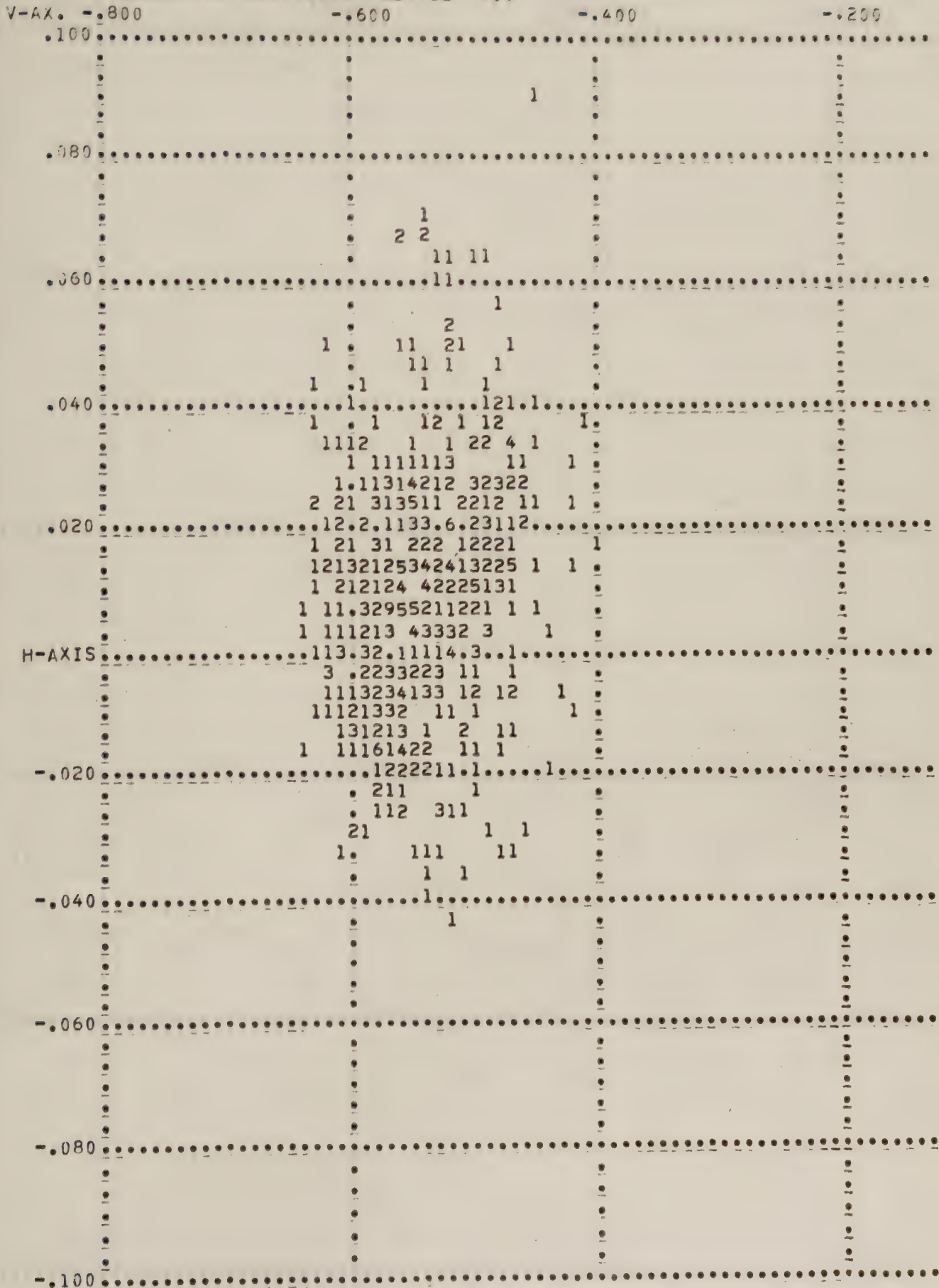


PROJECTION Y-YP IN THE TUBE 43



PROJECTION PHOT. IN THE TUBE 43
 NUMBER OF PARTICLES PLOTTED 500

Figure 7



GRAPHICAL OUTPUT OF Y- ENVELOPE VS. CELL NUMBER

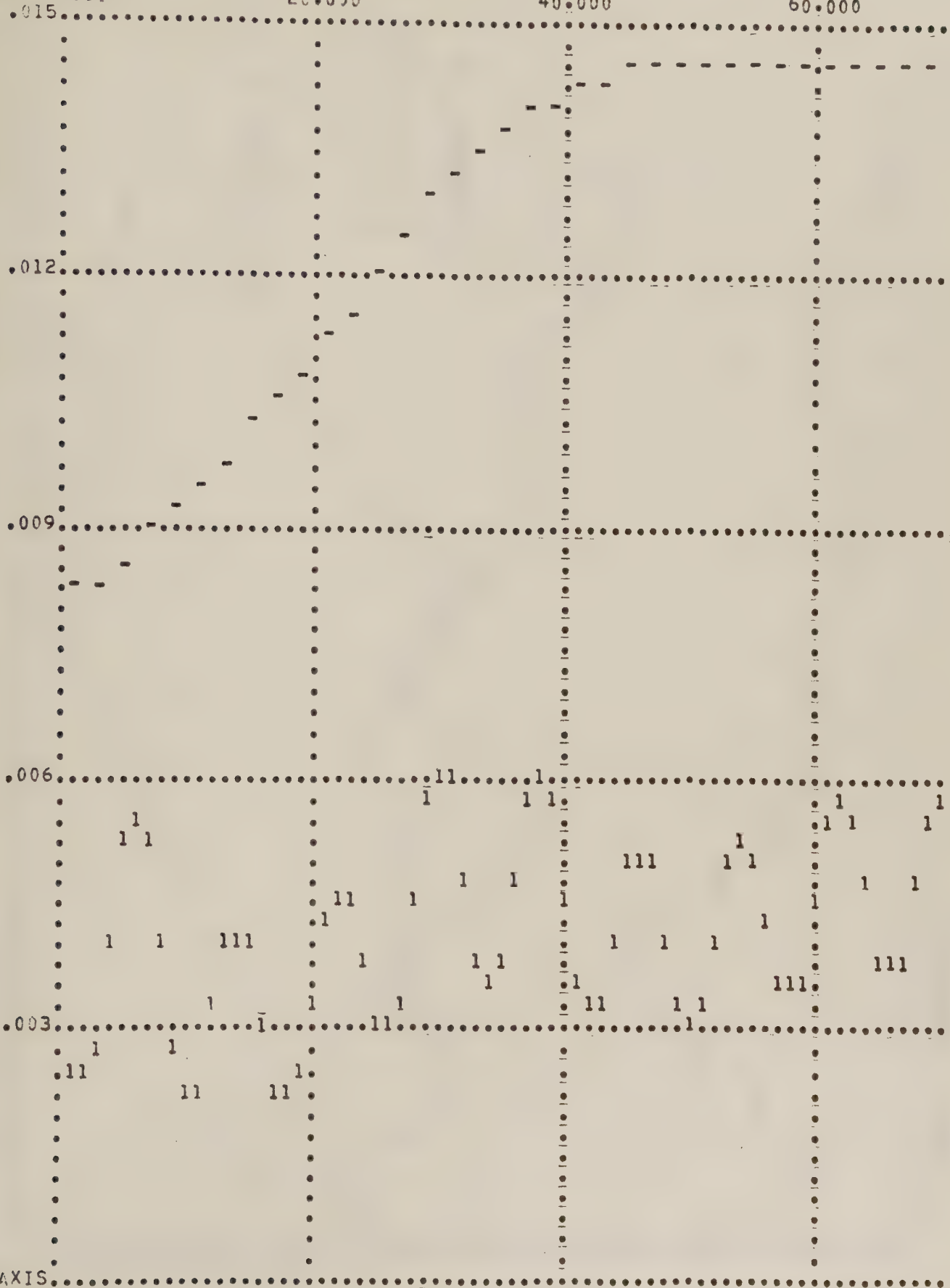
Figure 9

V-AX. 0.000

20.000

40.000

60.000



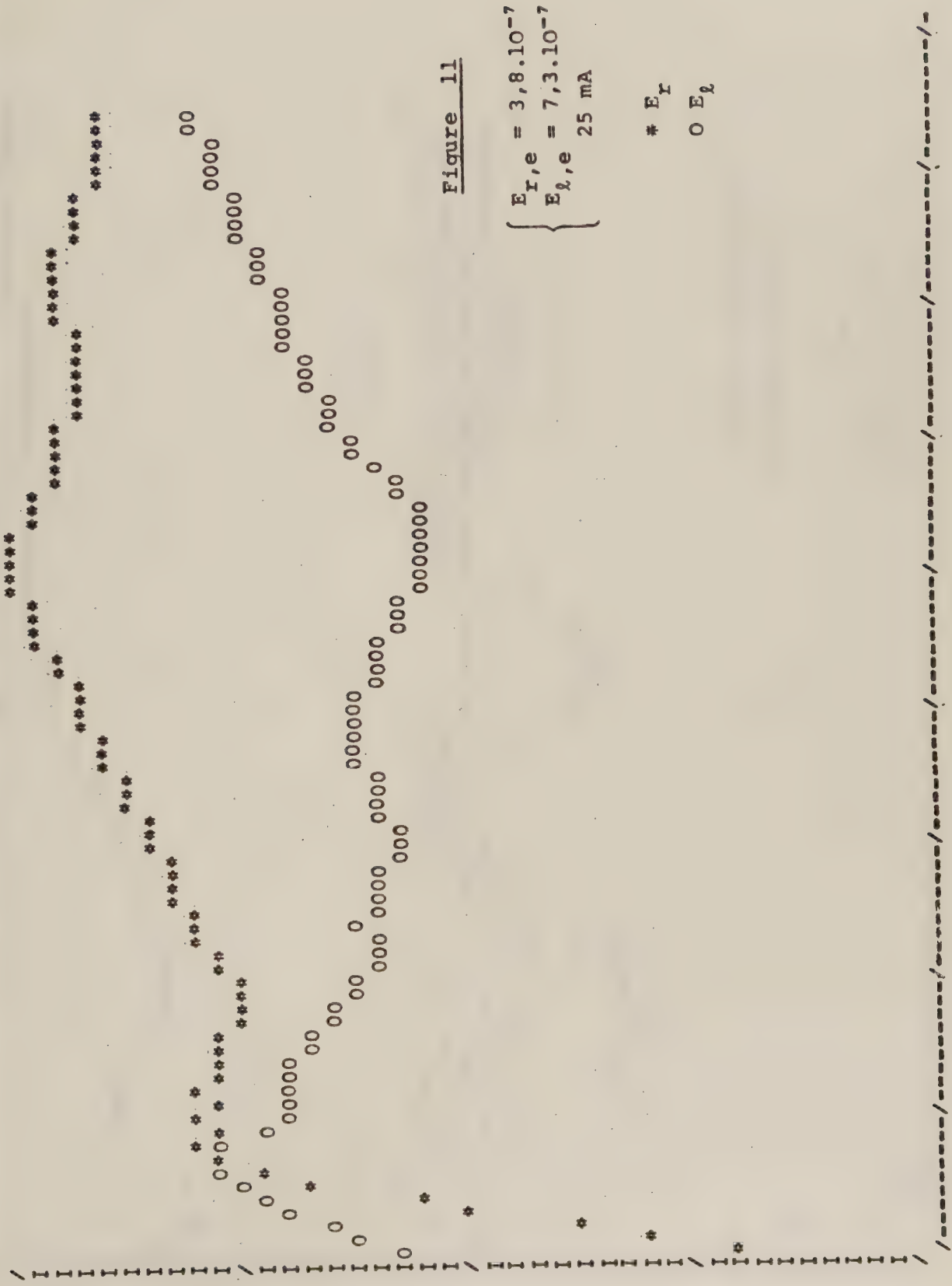


Figure 12

$$\begin{cases} E_{r,e} = 3,8.10^{-7} \\ E_{l,e} = 7,3.10^{-7} \\ \quad \quad 25 \text{ mA} \end{cases}$$

* vitesse radiale
O vitesse longitudinale





Figure 13

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r,e} = 3,8.10^{-7} \\ E_{l,e} = 7,3.10^{-7} \end{array} \right. \quad 25 \text{ mA}$$

Hyperémittance H

[illegible]

●●

●

李商隐

10

1

—

Figure 15

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r, e = 6 \cdot 10^{-1} \\ E_l, e = 6 \cdot 10^{-1} \\ 3 \text{ mA} \end{array} \right.$$

$\begin{matrix} \text{E} & \text{E} \\ * & \text{O} \end{matrix}$

[illegible]

— — — — —

[illegible]*000001
100000

• •

—

—

Figure 16

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r,e} = 6.10^{-8} \\ E_{\ell,e} = 6.10^{-8} \\ \quad \quad 3 \text{ mA} \end{array} \right.$$

* vitesse radiale
O vitesse longitudinale

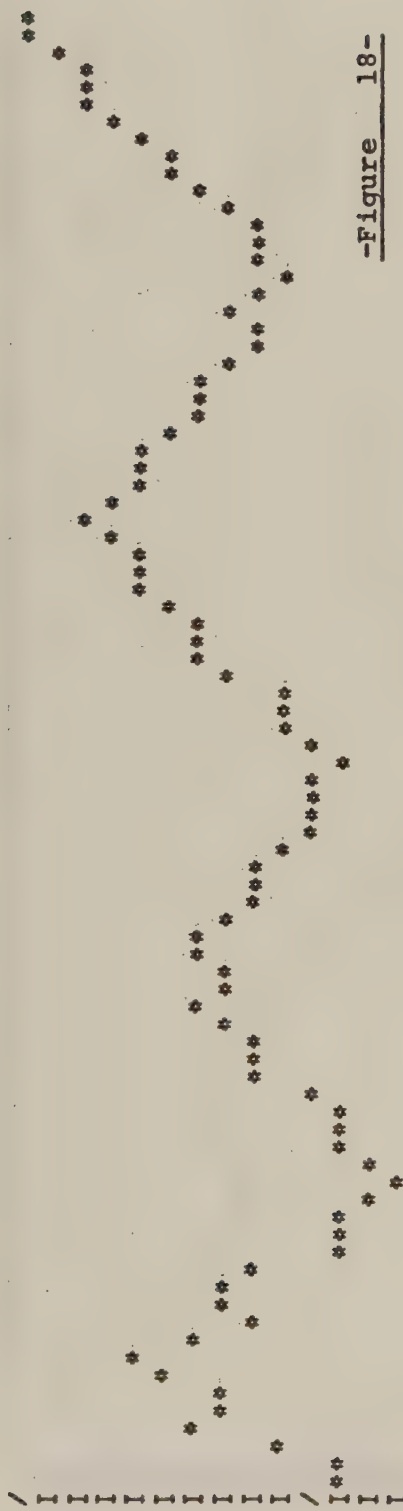




Figure 17

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r,e} = 6.10^{-8} \\ E_{l,e} = 6.10^{-8} \\ \quad \quad 3 \text{ mA} \end{array} \right.$$

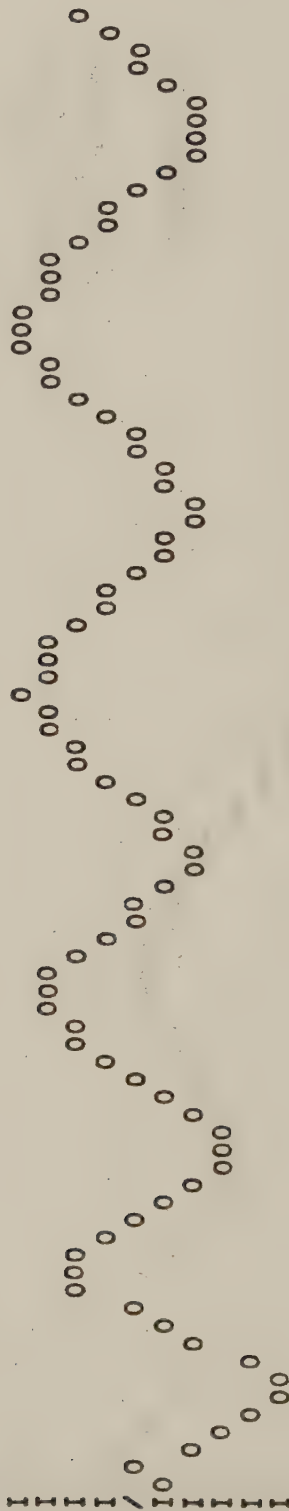
Hyperémittance H



-Figure 18-

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r,e} = 2 \cdot 10^{-6} \\ E_{l,e} = 7,1 \cdot 10^{-8} \end{array} \right. \text{ O mA}$$

* rayon moyen
O longueur du paquet



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
84

Figure 20

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r,e} = 2.10^{-6} \\ E_{l,e} = 7,1.10^{-8} \\ \quad \quad 0 \text{ mA} \end{array} \right.$$

* vitesse radiale

O vitesse longitudinale

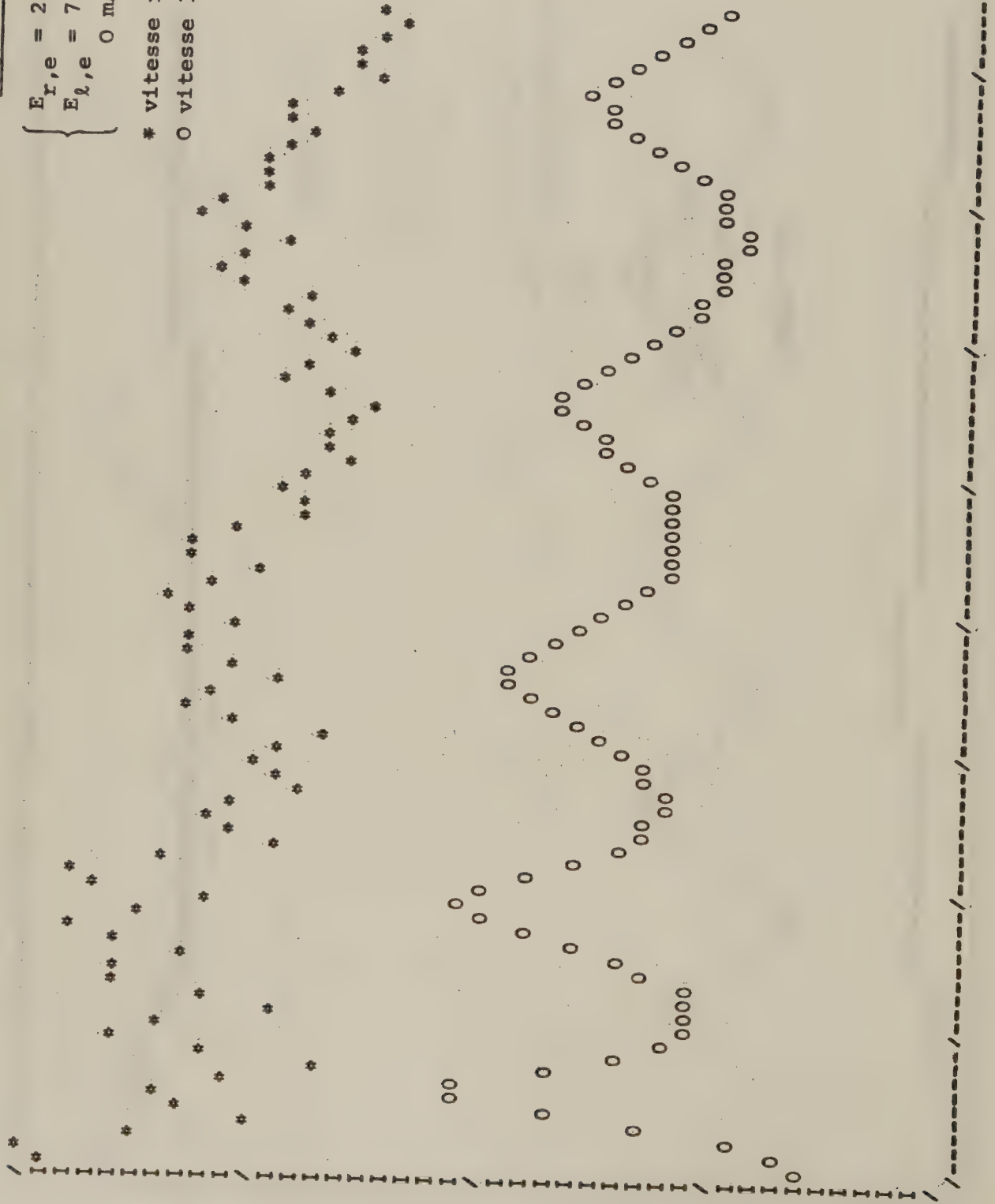


Figure 21

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{r,e} = 2.10^{-6} \\ E_{l,e} = 7,1.10^{-8} \\ \quad \quad 0 \text{ mA} \end{array} \right.$$

Hyperémittance H

Figure 22

1ère famille

Hyperémittance à l'entrée

H_e proportionnelle à $\sqrt{i}$

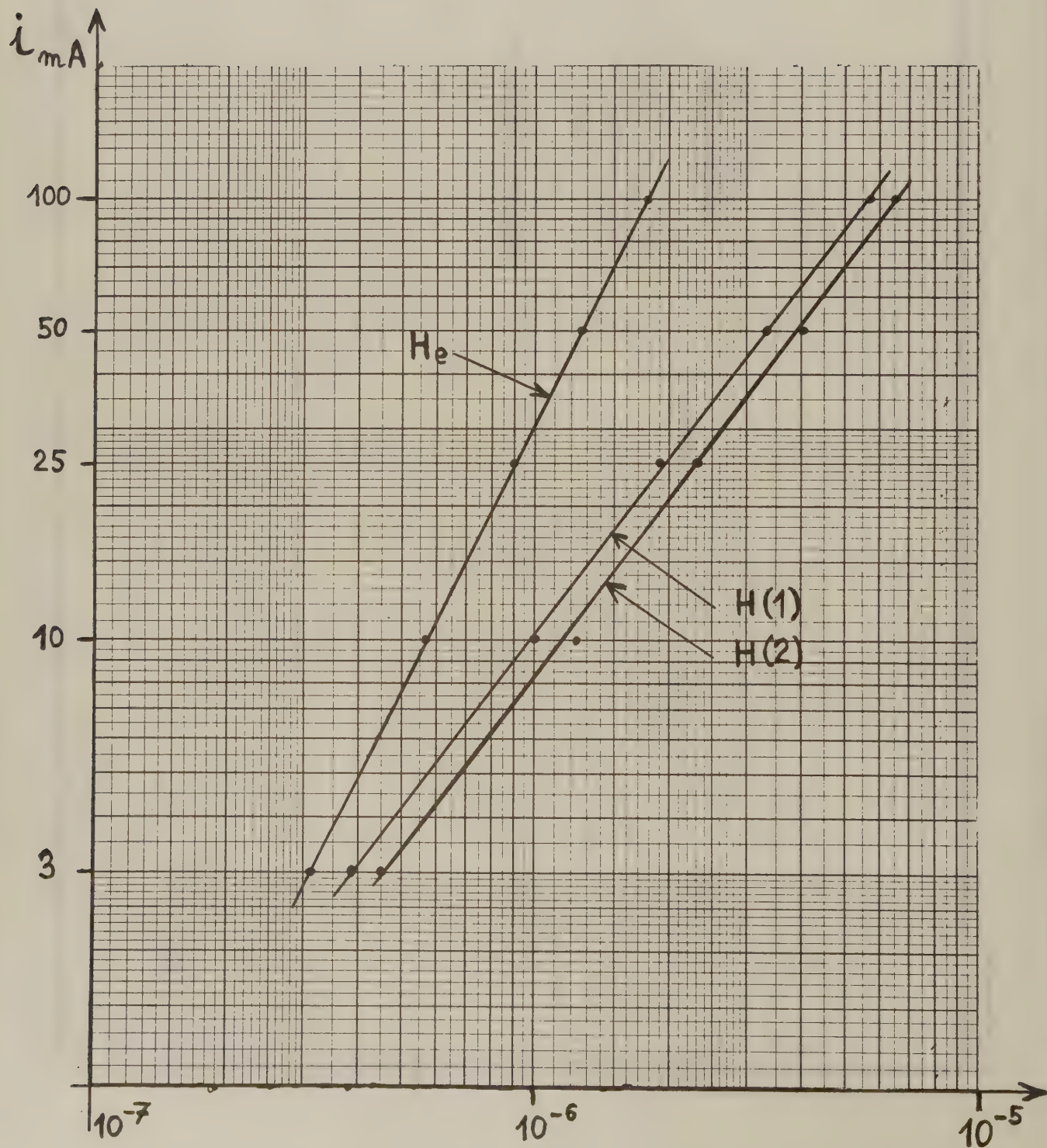


Figure 23

2ème famille

Hyperémittance à l'entrée

H_e proportionnelle à $\sqrt{I}$

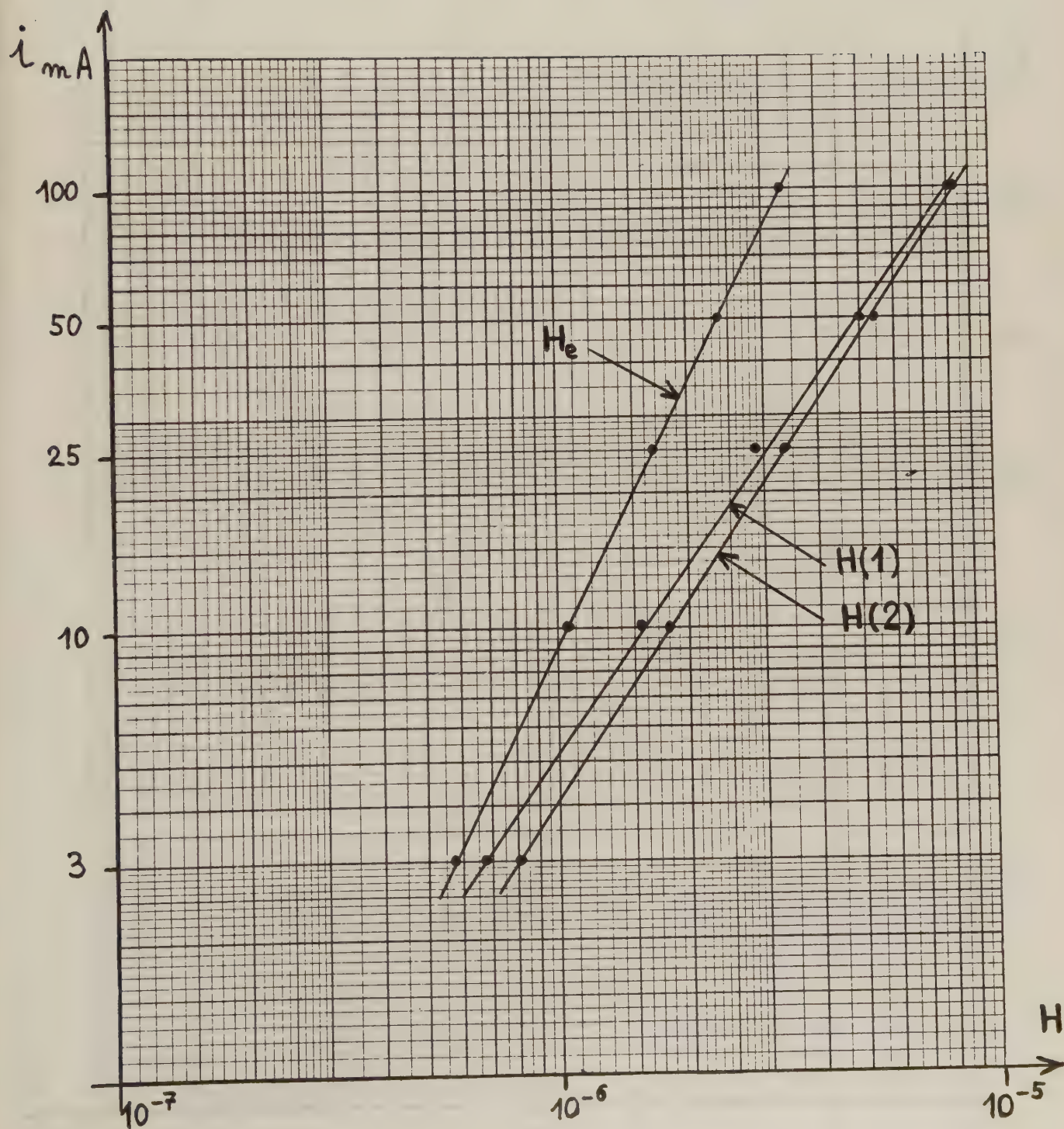
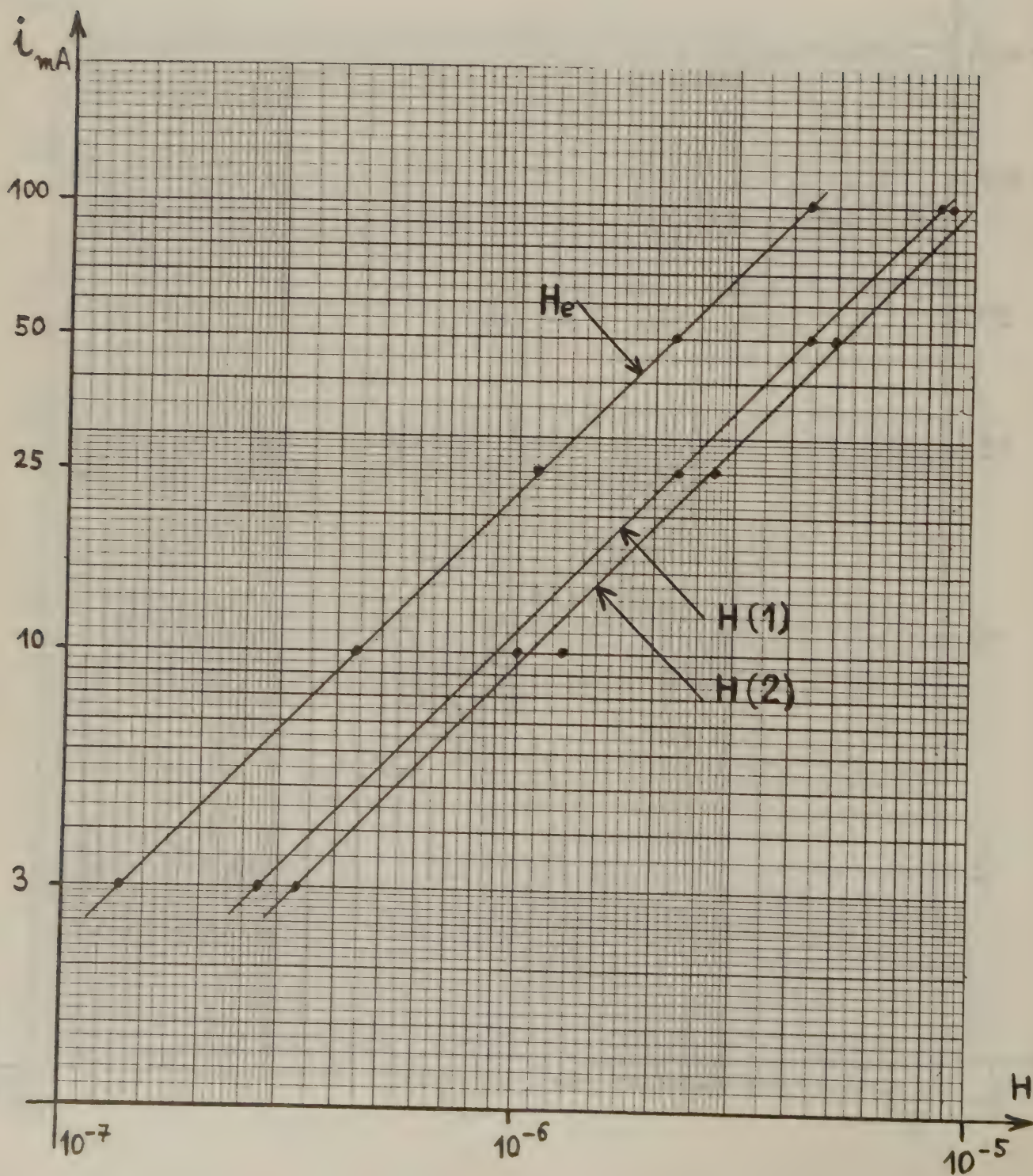


Figure 24

3ème famille

Hyperémittance à l'entrée

H_e proportionnelle à i



i (mA)	E _x et E _y	E _λ	He	H (1)	H (2)	G (1)	G (2)	$\frac{He}{1}$
100	3,8.10 ⁻⁷	7,3.10 ⁻⁷	1,19.10 ⁻⁶	6,24.10 ⁻⁶	6,94.10 ⁻⁶	4,24	4,84	1,19.10 ⁻⁵
50	"	"	"	3,97.10 ⁻⁶	3,97.10 ⁻⁶	2,34	2,34	2,38.10 ⁻⁵
25	"	"	"	2,74.10 ⁻⁶	3,05.10 ⁻⁶	1,30	1,56	4,76.10 ⁻⁵
10	"	"	"	1,76.10 ⁻⁶	2,09.10 ⁻⁶	0,48	0,76	1,19.10 ⁻⁴
3	"	"	"	1,35.10 ⁻⁶	1,50.10 ⁻⁶	0,13	0,26	3,97.10 ⁻⁴
100	10 ⁻⁷	6.10 ⁻⁶	5,89.10 ⁻⁶	1,27.10 ⁻⁵	1,36.10 ⁻⁵	1,16	1,31	5,89.10 ⁻⁵
50	"	"	"	1,05.10 ⁻⁵	1,17.10 ⁻⁵	0,99	0,99	1,18.10 ⁻⁴
25	"	"	"	1,06.10 ⁻⁵	1,06.10 ⁻⁵	0,80	0,80	2,36.10 ⁻⁴
10	"	"	"	8,72.10 ⁻⁶	8,72.10 ⁻⁶	0,48	0,48	5,89.10 ⁻⁴
3	"	"	"	6,93.10 ⁻⁶	6,93.10 ⁻⁶	0,18	0,18	1,96.10 ⁻³
100	2.10 ⁻⁶	7,1.10 ⁻⁶	2,67.10 ⁻⁶	5,68.10 ⁻⁶	6,67.10 ⁻⁶	1,13	1,50	2,67.10 ⁻⁵
50	"	"	"	4,41.10 ⁻⁶	4,81.10 ⁻⁶	0,65	0,80	5,34.10 ⁻⁵
25	"	"	"	3,25.10 ⁻⁶	3,47.10 ⁻⁶	0,22	0,30	1,07.10 ⁻⁴
10	"	"	"	3,32.10 ⁻⁶	3,32.10 ⁻⁶	0,24	0,24	2,67.10 ⁻⁴
3	"	"	"	2,71.10 ⁻⁶	2,71.10 ⁻⁶	0,014	0,014	8,9.10 ⁻⁴

Figure 25 - 1

i (mA)	E _x et E _y	E _t	H _e	H (1)	H (2)	G (1)	G (2)	$\frac{H_e}{i}$
100	3,8.10 ⁻⁷	2,2.10 ⁻⁶	2,62.10 ⁻⁶	7,61.10 ⁻⁶	7,96.10 ⁻⁶	1,90	2,04	2,62.10 ⁻³
50	"	"	"	6,16.10 ⁻⁶	6,57.10 ⁻⁶	1,35	1,51	5,24.10 ⁻³
25	"	"	"	4,88.10 ⁻⁶	5,56.10 ⁻⁶	0,86	1,12	1,04.10 ⁻⁴
10	"	"	"	4,28.10 ⁻⁶	4,66.10 ⁻⁶	0,63	0,78	2,62.10 ⁻⁴
3	"	"	"	3,12.10 ⁻⁶	3,32.10 ⁻⁶	0,19	0,27	8,73.10 ⁻⁴
100	3,8.10 ⁻⁷	7,1.10 ⁻⁸	5,64.10 ⁻⁷	5,34.10 ⁻⁶	6,27.10 ⁻⁶	8,47	10,12	5,64.10 ⁻⁶
50	"	"	"	3,51.10 ⁻⁶	4,34.10 ⁻⁶	5,22	6,70	1,13.10 ⁻³
25	"	"	"	1,90.10 ⁻⁶	2,40.10 ⁻⁶	2,37	3,26	2,26.10 ⁻³
10	"	"	"	1,42.10 ⁻⁶	1,89.10 ⁻⁶	1,52	2,35	5,64.10 ⁻³
3	"	"	"	5,93.10 ⁻⁷	6,31.10 ⁻⁷	0,05	0,12	1,88.10 ⁻⁴

Emittances en m.radian normalisé

$\frac{H_e}{i}$ en m.radian normalisé/A

PROGRAMME MAPRO2

Liste des noms des sous-programmes

INFILL

LOST

RESET

CHAS

CHARG2

MIRROR

GRAPH

GENLIN

QG

DG1

DG2

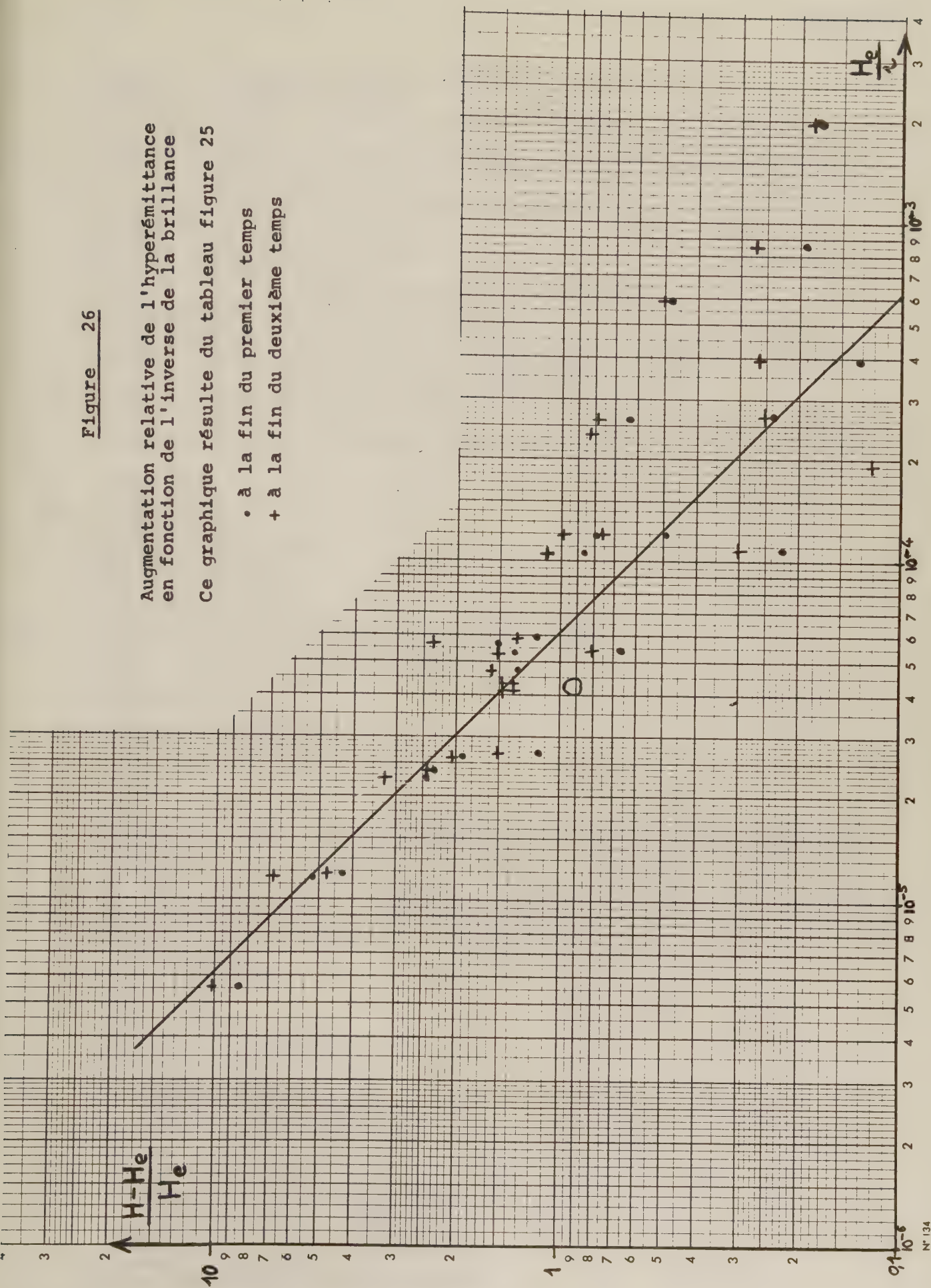
GQ

Figure 26

Augmentation relative de l'hyperémittance en fonction de l'inverse de la brillance

Ce graphique résulte du tableau figure 25

- à la fin du premier temps
- + à la fin du deuxième temps




```

PROGRAM MAPR02(TAPE1,INPUT,OUTPUT)
RESULTS ON MAGNETIC TAPE
DIMENSION T1(200),T2(200),T3(200),T4(200)
DIMENSION X(200)
DIMENSION ENVX(200),ENVY(200),RAV(200),ENVPH(100),EMX(100),
1      EMY(100),EML(100)
DIMENSION CELL(100,43),CORD(20),PART(5000,6),IND(5000)
DIMENSION SYMBOL(80),T(34)
COMMON /COM1/CELL/COM4/CORD
COMMON /COM5/PART,IND
COMMON      /COM6/SYMBOL,T,EMX1,EMY1,EML1
COMMON/COM7/FREQ,C02PF,COUR,IMAX1
COMMON/COM9/HISTOR(121),HISTVR(121)
COMMON /COM10/SX2,SXP2,SY2,SYP2,SDW,SDW2,SPH,SPH2,
1      CCXXP,CCYYP,CCPHDW,SZ,SZ2
COMMON /COM11/ENVX,ENVY,RAV,ENVPH,EMX,EMY,EML

```

CAUTION IND NEEDS 1 MEMORY MORE THAN THE NUMBER OF PARTICLES

```

PRINT 300
300  FORMAT(1HQ)
      REST=938.232
      RESTJ=15.02723E-11
      CONV=REST/RESTJ
      EPSNAU=8.85E-12
      SMALLE=1.602E-19
C     EPSNAU=DIEL. CONST.,SMALLE= ELECT. CHARGE
      READ  201, (SYMBOL(II),II=1,80)
      READ  202, (T(II),II=1,34)
      CALL GENLIN
      CALL INFILL(NI,COUR)
      Q=COUR*0.25/NI/FREQ
      Q2P=Q*SMALLE/EPSNAU
      NP=NI
      CALL LOST(NP,1,NI)
      CALLGRAPH (1,2,-0.01,0.01,0.,.015,13,1,NP,PART(1,1),PART(1,2))
      CALLGRAPH2(1,2,-0.01,0.01,0.,.03,13,1,NP,HISTOR(1),HISTVR(1))
      CALLGRAPH (3,4,-0.01,0.01,0.,.015,13,1,NP,PART(1,3),PART(1,4))
      CALLGRAPH2(3,4,-0.01,0.01,0.,.03,13,1,NP,HISTOR(1),HISTVR(1))
      CALLGRAPH (6,10,-2.,1.0,-0.05,0.05,13,1,NP,PART(1,6),PART(1,5))
      CALLGRAPH2(6,10,-2.,1.0,-0.05,0.05,13,1,NP,HISTOR(1),HISTVR(1))
      IMAX=IMAX1-1
      IFINAL=2*IMAX+1
      CALL RESET
      DO 29 J=1,NP
      WRED=PART(J,5)-CELL(1,10)
      SXP2=SXP2+PART(J,2)**2
      SYP2=SYP2+PART(J,4)**2
      SPH2=SPH2+PART(J,6)**2
      SPH =SPH +PART(J,6)
      SDW =SDW +WRED
      SDW2=SDW2+WRED**2
      CCXXP=CCXXP+PART(J,1)*PART(J,2)
      CCYYP=CCYYP+PART(J,3)*PART(J,4)
      CCPHDW=CCPHDW+PART(J,6)*WRED
      A4=PART(J,5)/REST
      BETA=SQRT(2.*A4+A4**2)/(1.+A4)

```

```

ZED=PART(J,6)*CO2PF*BETA*(-1.)
SX2=SX2+PART(J,1)**2
SY2=SY2+PART(J,3)**2
SZ2=SZ2+ZED**2
29 SZ=SZ+ZED
CALL CHAS(NP,1)

C
C I IS CELL NUMBER
C J IS PARTICLE NUMBER
C LOOP 11 OVER THE CELLS
DO 11 I=1,IMAX
  I1=I+1
  JJ=2*I
  JCOM=JJ+1

C
C STEP OVER HALF QUADRUPOLE + DRIFT SPACE
DO 1 J=1,NP
  DO 2 N=1,6
    CORD(N)=PART(J,N)
    A4=CORD(5)/REST
    BEGAM=SQRT(2.*A4+A4**2)
    CORD(9)=BEGAM
    CORD(7)=BEGAM/(A4+1.)
    CALL QG(I)
    DO 3 N=1,6
      PART(J,N)=CORD(N)
    1 CONTINUE

C
C FINDING GAUSSIAN VARIANCES AT MID GAP
CALL RESET
DO 4 J=1,NP
  DO 5 N=1,6
    CORD(N)=PART(J,N)
    CALL DG1(I)
    SXP2=SXP2+CORD(12)**2
    SYP2=SYP2+CORD(14)**2
    SPH =SPH +CORD(16)
    SPH2=SPH2+CORD(16)**2
    SDW =SDW +CORD(10)
    SDW2=SDW2+CORD(10)**2
    CCXXP=CCXXP+CORD(11)*CORD(12)
    CCYYP=CCYYP+CORD(13)*CORD(14)
    CCPHDW=CCPHDW+CORD(16)*CORD(10)
    SX2=SX2+CORD(11)**2
    SY2=SY2+CORD(13)**2
    SZ2=SZ2+CORD(8) **2
  4 SZ=SZ+CORD(8)
  CALL CHAS(NP,JJ)
  IF(COUR.EQ.0.)GOTO24
  SQRT(PI**3/2.)=3.93744
  CHIABC=NP/3.93744
  CALL CHARG2(SX2,SY2,SZ2)
C COEFF=Q*SMALLE/EPSNAU*CHINAU*A*B*C*MEV/JOULE*L
C COEFF=Q2P*CHIABC*CONV*CELL(I,31)

C
C STEP OVER GAP TAKING INTO ACCOUNT SPACE CHARGE AT MID GAP
DO 6 J=1,NP

```

```

DO 7 N=1,6
7  CORD(N)=PART(J,N)
C
CALL DG1(I)
XS=CORD(11)**2
YS=CORD(13)**2
ZRED=CORD(8)-SZ
ZS=ZRED**2
CALL CHARG(XS,YS,ZS)
DELTWX=CORD(11)*XS*COEFF
DELTWY=CORD(13)*YS*COEFF
DELTWZ=ZRED*ZS*COEFF
C  THE 3 ENERGY VARIATIONS ARE NOW EXPRESSED IN MEV
CONVXY=REST*CORD(9)*CORD(7)
DELTXP=(DELTWX-CORD(12)*DELTWZ)/CONVXY
DELTYP=(DELTWY-CORD(14)*DELTWZ)/CONVXY
CORD(2)=CORD(2)+DELTXP
CORD(12)=CORD(12)+DELTXP
CORD(4)=CORD(4)+DELTYP
CORD(14)=CORD(14)+DELTYP
CORD(5)=CORD(5)+DELTWZ
CORD(15)=CORD(15)+DELTWZ
A4=CORD(15)/REST
A5=SQRT(2.*A4+A4*A4)
CORD(9)=A5
CORD(7)=CORD(9)/(A4+1.)
CALL DG2(I)
C
C  STEP OVER DRIFT SPACE + HALF QUADRUPOLE
CALL GQ(I1)
DO 8 N=1,6
8  PART(J,N)=CORD(N)
6  CONTINUE
GOTO23
C
C  ZERO CURRENT TREATMENT
24 DO 25 J=1,NP
DO 26 N=1,6
26 CORD(N)=PART(J,N)
CALL DG1(I)
CALL DG2(I)
CALL GQ(I1)
DO 25 N=1,6
25 PART(J,N)=CORD(N)
23 CALL LOST(NP,I1,NI)
C
C  FINDING GAUSSIAN VARIANCES AT MID QUADRUPOLE
CALL RESET
DO 9 J=1,NP
WRED=PART(J,5)-CELL(I1,10)
SXP2=SXP2+PART(J,2)**2
SYP2=SYP2+PART(J,4)**2
SPH2=SPH2+PART(J,6)**2
SPH=SPH+PART(J,6)
SDW=SDW+WRED
SDW2=SDW2+WRED**2
CCXXP=CCXXP+PART(J,1)*PART(J,2)

```

```

CCYYP=CCYYP+PART(J,3)*PART(J,4)
CCPHDW=CCPHDW+PART(J,6)*WRED
A4=PART(J,5)/REST
BETA=SQRT(2.*A4+A4**2)/(1.+A4)
ZED=PART(J,6)*CO2PF*BETA*(-1.)
SX2=SX2+PART(J,1)**2
SY2=SY2+PART(J,3)**2
SZ2=SZ2+ZED**2
9  SZ=SZ+ZED
CALL CHAS(NP,JCOM)
IF(COUR.EQ.0.)GOTO22
CHIABC=NP/3.93744
TUBE=CELL(I,27)+CELL(I1,26)-(CELL(I,31)+CELL(I1,31))/2.
CALL CHARG2(SX2,SY2,SZ2)
COEFF=Q2P*CHIABC*CONV*TUBE

```

```

C
C LOOP 10 TAKES INTO ACCOUNT SPACE CHARGE AT MID QUADRUPOLE

```

```

DO 10 J=1,NP
XS=PART(J,1)**2
YS=PART(J,3)**2
A4=PART(J,5)/REST
BEGAM=SQRT(2.*A4+A4**2)
BETA=BEGAM/(1.+A4)
ZED=PART(J,6)*CO2PF*BETA*(-1.)
ZRED=ZED-SZ
ZS=ZRED**2
CALL CHARG(XS,YS,ZS)
DELTWX=PART(J,1)*XS*COEFF
DELTWY=PART(J,3)*YS*COEFF
DELTWZ=ZRED*ZS*COEFF
CONVXY=REST*BETA*BEGAM
DELTXP=(DELTWX-PART(J,2)*DELTWZ)/CONVXY
DELTYP=(DELTWY-PART(J,4)*DELTWZ)/CONVXY
PART(J,2)=PART(J,2)+DELTXP
PART(J,4)=PART(J,4)+DELTYP
10 PART(J,5)=PART(J,5)+DELTWZ

```

```

C
C RESETTING XP AND YP POSITIVE

```

```

22 DO 12 J=1,NP
IF(PART(J,2).GT.0.) GO TO 13
PART(J,2)=-PART(J,2)
PART(J,1)=-PART(J,1)
13 IF(PART(J,4).GT.0.) GO TO 12
PART(J,4)=-PART(J,4)
PART(J,3)=-PART(J,3)

```

```

12 CONTINUE

```

```

IF(JCOM.NE.IFINAL) GO TO 11

```

```

CALL GRAPH( 1, 2,-0.015,0.015,0.,0.03,13,I1,NP,PART(1,1),PART(1,2)

```

```

1) CALLGRAPH2(1,2,-0.015,0.015,0.,0.15,13,I1,NP,HISTOR(1),HISTVR(1))

```

```

CALL GRAPH( 3, 4,-0.015,0.015,0.,0.03,13,I1,NP,PART(1,3),PART(1,4)

```

```

1) CALLGRAPH2(3,4,-0.015,0.015,0.,0.15,13,I1,NP,HISTOR(1),HISTVR(1))

```

```

CALL GRAPH(6,10,-1.2,0.,-0.1,0.1,13,I1,NP,PART(1,6),PART(1,5))

```

```

CALLGRAPH2(6,10,-1.5,1.,-0.1,0.1,13,I1,NP,HISTOR(1),HISTVR(1))

```

```

11 CONTINUE

```

```

C      STORING THE BORE RADII IN PROPER LOCATION
      JJCOM=2*JCOM+1
      DO 27 I=1,JCOM
27      X(I)=I
          K=1
          K1=JCOM+1
          K2=JCOM+IMAX1
          K3=1
          DO 21 I=K1,K2
              X(I)=K
              X(I+IMAX1)=K
              ENVX(I)=CELL(K3,29)
              ENVY(I)=CELL(K3,29)
              RAV(I)=CELL(K3,29)
              ENVX(I+IMAX1)=CELL(K3,29)
              ENVY(I+IMAX1)=CELL(K3,29)
              RAV(I+IMAX1)=CELL(K3,29)
              K=K+2
21      K3=K3+1
C
C      NORMALIZING THE EMITTANCES
      DO 28 I=1,IMAX1
          JJ=2*I-1
          EMX(JJ)=EMX(JJ)*CELL(I,32)
          EMY(JJ)=EMY(JJ)*CELL(I,32)
          T1(JJ)=EMX(JJ)/ENVX(JJ)
          T2(JJ)=EMY(JJ)/ENVY(JJ)
          T4(JJ)=SQRT(T1(JJ)**2+T2(JJ)**2)
28      T3(JJ)=EML(JJ)/(ENVPH(JJ)*REST*CELL(I,32))
          DO 30 I=1,IMAX
              JJ=2*I
              BEGAM=CELL(I,37)/SQRT(1.-CELL(I,37)**2)
              EMX(JJ)=EMX(JJ)*BEGAM
              EMY(JJ)=EMY(JJ)*BEGAM
              T1(JJ)=EMX(JJ)/ENVX(JJ)
              T2(JJ)=EMY(JJ)/ENVY(JJ)
              T4(JJ)=SQRT(T1(JJ)**2+T2(JJ)**2)
30      T3(JJ)=EML(JJ)/(ENVPH(JJ)*REST*BEGAM)
          EMX1=4.*EMX(1)
          EMY1=4.*EMY(1)
          EML1=4.*EML(1)*C02PF/REST
          TR=T4(1)*4.
          TL=T3(1)*4.
          DO 31 I=1,JCOM
              JJ=JCOM-I+1
              EMX(JJ)=EMX(JJ)/EMX(1)
              EMY(JJ)=EMY(JJ)/EMY(1)
              EML(JJ)=EML(JJ)/EML(1)
              T3(JJ)=T3(JJ)/T3(1)
31      T4(JJ)=T4(JJ)/T4(1)
C
      CALL SDDATE(L4,L5,L6)
      CALL SHEURE(L3,L2,L1)
      JOBNUM=L1+100*(L2+100*(L3+100*(L4+100*(L5+100*L6))))
      MARK=999999
33      READ(1) JOB
          IF(JOB.EQ.MARK) GO TO 32

```

```

CALL WFRWDF(1)
GO TO 33
32 BACKSPACE 1
WRITE(1) JOBNUM
WRITE(1) JCOM
WRITE(1) EMX1, EMY1, EML1, TR, TL
WRITE(1) (ENVX(I), I=1, JCOM)
WRITE(1) (ENVY(I), I=1, JCOM)
WRITE(1) (RAV(I), I=1, JCOM)
WRITE(1) (ENVPH(I), I=1, JCOM)
WRITE(1) (EMX(I), I=1, JCOM)
WRITE(1) (EMY(I), I=1, JCOM)
WRITE(1) (EML(I), I=1, JCOM)
WRITE(1) (T4(I), I=1, JCOM)
WRITE(1) (T3(I), I=1, JCOM)
END FILE 1
WRITE(1) MARK
END FILE 1
REWIND 1
PRINT 203, JOBNUM
203 FORMAT (1H1,/////,10X,*RESULTS ON TAPE*,//,10X,*JOBNUM =*,I12)
C
SCA=120.
CALL GRAPH1( 1,1,0.,SCA,0.,0.015,1,1,JCOM,X,ENVX)
CALL GRAPH1( 3,1,0.,SCA,0.,0.015,1,1,JCOM,X,ENVY)
CALL GRAPH1(17,1,0.,SCA,0.,0.015,1,1,JCOM,X,RAV)
CALL GRAPH1( 6,1,0.,SCA,0., 1.,1,1,JCOM,X,ENVPH)
CALL GRAPH1(11,2,0.,SCA,0.,15.,1,1,JCOM,X,EMX)
CALL GRAPH1(13,2,0.,SCA,0.,15.,1,2,JCOM,X,EMY)
CALL GRAPH1(15,2,0.,SCA,0.,15.,1,3,JCOM,X,EML)
EMX1=TR
CALL GRAPH1(17,3,0.,SCA,0.,15.,1,1,JCOM,X,T4)
EMX1=TL
CALL GRAPH1(15,3,0.,SCA,0.,15.,1,1,JCOM,X,T3)
C
C IDENTIFICATION OF LOST PARTICLES
IF(NI.NE.NP)GOTO18
PRINT 218
GOTO19
18 LOSRAD=0
NN=NI+1
J=NP
16 J=J+1
20 IF(IND(J).GT.0) GO TO 15
LOSRAD=LOSRAD+1
IND(NN)=IND(J)
DO 14 K=J,NI
14 IND(K)=IND(K+1)
IF(J.LT.NI)GOTO20
GOTO17
15 IF(J.LT.NI) GO TO 16
17 CONTINUE
PRINT 210
PRINT 215,NP
PRINT 216,(IND(I),I=1,NP)
PRINT 210
PRINT 211,LOSRAD

```

```
K=NI-LOSRAD+1
PRINT 217,(IND(I),I=K,NI)
K=K-1
NN=NP+1
LOSLON=K-NP
IF(LOSLON.EQ.0) GO TO 19
PRINT 210
PRINT 212,LOSLON
PRINT 217,(IND(I),I=NN,K)
19  STOP
201  FORMAT(80A1)
202  FORMAT (34A1)
210  FORMAT (1H1)
211  FORMAT (5X,*LIST OF THE *,I5,* RADially LOST PARTICLES*)
212  FORMAT (5X,*LIST OF THE *,I5,* LONGITUDINALLY LOST PARTICLES*)
215  FORMAT (5X,*LIST OF THE *,I5,* ACCEPTED PARTICLES*)
216  FORMAT (5X,20I6)
217  FORMAT (2X,15I8)
218  FORMAT(1H ,*NO PARTICLES HAVE BEEN LOST IN THIS RUN*)
      END
```

```

SUBROUTINE INFILL(N,COUR)
DIMENSION CELL(100,43)
DIMENSION PART(5000,6),IND(5000)
COMMON /COM5/PART,IND
COMMON /COM1/CELL

```

```

C
C
C   READING OF DATA

```

```

READ 100,N,COUR,P,Q,XAX,YAX,DFIAX,DELTX,DELTY,DELTPH
PRINT 101,COUR

```

```

C
C
C   COMPUTATION OF EMIITANCE PARAMETERS

```

```

DO 4 I=1,N
4  IND(I)=I
   PHIS=-30.
   COEF=P/CELL(I,32)
   XPAX=COEF/XAX
   YPAX=COEF/YAX
   DWAX=6.2832*938.232/1.48/DFIAX*Q
   DRIFT=-0.0246

```

```

C
C
C   PRINT OUT OF EMIITANCE PARAMETERS

```

```

PRINT 102,P,Q
PRINT 103,XAX,XPAX,YAX,YPAX
PRINT 105,DFIAX,DWAX
PRINT 106,DELTX,DELTY,DELTPH

```

```

C
C
C   CHOICE OF TRANSVERSAL COORDINATES

```

```

C1=DELTX/XPAX
C2=DELTY/YPAX
C3=DELTPH/DWAX
PHIS=PHIS*0.01745329
DO 1 I=1,N
2  R1=2.*RNDM(D)-1.
   R2=RNDM(D)
   R3=2.*RNDM(D)-1.
   R4=RNDM(D)
   F1=R1**2+R2**2
   F2=R3**2+R4**2
   IF((F1+F2).GT.1.)GO TO 2
   PART(I,2)=R2*XPAX
   PART(I,4)=R4*YPAX
   PART(I,1)=XAX*R1+PART(I,2)*(C1+DRIFT)
   PART(I,3)=YAX*R3+PART(I,4)*(C2+DRIFT)
3  R5=2.*RNDM(D)-1.
   R6=2.*RNDM(D)-1.
   IF(((R5*R5)+(R6*R6)).GT.1.)GO TO 3
   PART(I,5)=DWAX*R6
   PART(I,6)=PHIS+DFIAX*R5+C3*PART(I,5)
   PART(I,5)=PART(I,5)+CELL(1,10)
1  CONTINUE

```

```

RETURN

```

```

100  FORMAT (I5,F7.3,2E10.3,3F9.5/3F9.5)

```

```

101  FORMAT(1H1,40X,*THE CURRENT LEVEL IN THIS RUN IS*,3PF7.1,* MILLIA

```

```
IPS*/41X.49(1H*),//)
102  FORMAT (5X,*TRANS. EMITT.=*,E10.3,* M.RAD. NORM.*,
1    5X,*LONG. EMITT.=*,E10.3,* M.RAD. NORM.*,//)
103  FORMAT (5X,*XM =*,F9.5,* M*,5X,*XPM =*,F9.5,* RAD*,
1    5X,*YM =*,F9.5,* M*,5X,*YPM =*,F9.5,* RAD*,//)
104  FORMAT(1H ,*DATA FOR INPUT PHASE SPACE*/)
105  FORMAT (5X,*PH =*,F9.5,* RAD*,5X,*DW =*,F9.5,* MEV*,//)
106  FORMAT (5X,*DELTX =*,F9.5,* M*,
1    5X,*DELT Y =*,F9.5,* M*,5X,*DELTPH =*,F9.5,* RAD*)
END
```

```
SUB ROUTINE LOST(NP,I,NI)
DIMENSION CELL(100,43),PART(5000,6),IND(5000)
COMMON /COM1/CELL/COM5/PART,IND
NN=NI+1
J=0
18 J=J+1
13 IF(PART(J,1)**2+PART(J,3)**2.GT.CELL(I,38)) GO TO 16
IF(PART(J,6).LT.2.)GO TO 17
ILR=1
GO TO 19
16 ILR=-1
19 IND(NN)=(IND(J)*1000+I)*ILR
DO 15 K=J,NI
15 IND(K)=IND(K+1)
NP=NP-1
IF(J.EQ.NP+1) GO TO 20
DO 14 K=J,NP
DO 14 L=1,6
14 PART(K,L)=PART(K+1,L)
GO TO 13
17 IF(J.LT.NP) GO TO 18
20 RETURN
END
```

RESET

SUB ROUTINE RESET

COMMON /COM10/SX2,SXP2,SY2,SYP2,SDW,SDW2,SPH,SPH2,
1 CCXXP,CCYYP,CCPHDW,SZ,SZ2

SZ =0.

SZ2 =0.

SX2 =0.

SY2 =0.

SDW =0.

SPH =0.

SXP2 =0.

SYP2 =0.

SDW2 =0.

SPH2 =0.

CCXXP =0.

CCYYP =0.

CCPHDW=0.

RETURN

END

```

SUB ROUTINE CHAS(NP,JJ)
  DIMENSION ENVX(200),ENVY(200),RAV(200),ENVPH(100),EMX(100),
  I EMY(100),EML(100)
  DIMENSION T1(200),T2(200),T3(200)
  COMMON /TEMPER/T1,T2,T3
  COMMON /COM10/SX2,SXP2,SY2,SYP2,SDW,SDW2,SPH,SPH2,
  I CCXXP,CCYYP,CCPHDW,SZ,SZ2
  COMMON /COM11/ENVX,ENVY,RAV,ENVPH,EMX,EMY,EML
  FN=1./FLOAT(NP)
  SX2=SX2      *FN
  SY2=SY2      *FN
  SDW=SDW      *FN
  SPH=SPH      *FN
  SXP2=SXP2    *FN
  SYP2=SYP2    *FN
  SDW2=SDW2    *FN
  SPH2=SPH2    *FN
  CCXXP=CCXXP  *FN
  CCYYP=CCYYP  *FN
  CCPHDW=CCPHDW*FN
  SZ=SZ        *FN
  SZ2=SZ2      *FN
  SZ2=SZ2-SZ**2
  SPH2=SPH2-SPH**2
  SDW2=SDW2-SDW**2
  CCPHDW=CCPHDW-SPH*SDW
  ENVX(JJ)=2.*SQRT(SX2)
  ENVY(JJ)=2.*SQRT(SY2)
  RAV(JJ)=SQRT(ENVX(JJ)*ENVY(JJ))
  ENVPH(JJ)=2.*SQRT(SPH2)
  EMX(JJ)=SQRT(SX2*SXP2-CCXXP**2)
  EMY(JJ)=SQRT(SY2*SYP2-CCYYP**2)
  EML(JJ)=SQRT(SPH2*SDW2-CCPHDW**2)
  T1(JJ)=SXP2-CCXXP**2/SX2
  T2(JJ)=SYP2-CCYYP**2/SY2
  T3(JJ)=SDW2-CCPHDW**2/SPH2
  RETURN
END

```

SUB ROUTINE CHARG2(XS,YS,ZS)

DIMENSION T(10),W(10),RAST(10),RBST(10),RCST(10),ROOT(10)

AT THIS LEVEL, XS, YS, ZS ARE AS, BS, CS.

DATA T(1) / 7.5647524700441E+01/, W(1) / 1.9584184162984E+02/

DATA T(2) / 1.3821771900817E+01/, W(2) / 1.6416104011381E+01/

DATA T(3) / 5.2384893690947E+00/, W(3) / 4.2632836426772E+00/

DATA T(4) / 2.5297983448730E+00/, W(4) / 1.6774611612787E+00/

DATA T(5) / 1.3498292809161E+00/, W(5) / 8.1589770848158E-01/

DATA T(6) / 7.4083442561074E-01/, W(6) / 4.4779374604309E-01/

DATA T(7) / 3.9528842369063E-01/, W(7) / 2.6210823466935E-01/

DATA T(8) / 1.9089472738069E-01/, W(8) / 1.5535745352788E-01/

DATA T(9) / 7.2349623997255E-02/, W(9) / 8.5929572651477E-02/

DATA T(10) / 1.3219203192172E-02/, W(10) / 3.4222839521660E-02/

DO 1 I=1,10

TT=T(I)*1E-04

RAST(I)=0.5/(XS+TT)

RBST(I)=0.5/(YS+TT)

RCST(I)=0.5/(ZS+TT)

ROOT(I)=SQRT(RAST(I)*RBST(I)*RCST(I)*8.0)

RETURN

ENTRY CHARG

HERE IS COMPUTED THE INTEGRAL I OVER T FROM ZERO TO INFINITY OF
 $0.5/\exp(XS/(AS+T)+YS/(BS+T)+ZS/(CS+T))/\sqrt{(AS+T)*(BS+T)*(CS+T)}$
 /EITHER (AS+T) OR (BS+T) OR (CS+T)

THE EXPRESSION OF THE FIELD E IS THEN

$E=A*B*C*CHINAU*I*Q/EPNAU$ MULTIPLIED BY EITHER X OR Y OR Z

RX=0.

RY=0.

RZ=0.

DO 2 I=1,10

RAS=RAST(I)

RBS=RBST(I)

RCS=RCST(I)

H=W(I)*EXP(-XS*RAS-YS*RBS-ZS*RCS)*ROOT(I)

RX=RX+RAS*H

RY=RY+RBS*H

RZ=RZ+RCS*H

XS=RX*1E-04

YS=RY*1E-04

ZS=RZ*1E-04

RETURN

END

```
SUBROUTINE MIRROR  
COMMON/COM9/HISTOR(121),HISTVR(121)  
COMMON/COM8/SUM,XMIN,RANGEX,YMAX  
DIMENSION SUM(121)  
DO 1 M=1,121  
HISTOR(M)=XMIN+RANGEX/120.*(M-1)  
HISTVR(M)=SUM(M)  
IF(SUM(M).GT.YMAX) YMAX=SUM(M)  
CONTINUE  
RETURN  
END
```

SUBROUTINE GRAPH(IX,IY,XMI,XMA,YMI,YMA,ITG,NUM,NP,X,Y)

COMMON/COM8/SUM,XMIN,RANGEX,YMAX
 DIMENSION X(5000),Y(5000)
 DIMENSION YYY(6),XXX(7),XCHARA(12,121)
 DIMENSION CELL(100,43)
 DIMENSION T(34),SYMBOL(80)
 DIMENSION SUM(121)
 COMMON /COM6/SYMBOL,T,EMX1,EMY1,EML1
 COMMON/COM1/CELL
 EQUIVALENCE (MP,NPP)

IENV=0
 ICOUNT=1
 DO 37 M=1,121
 37 SUM(M)=0.
 PRINT 999
 I1=2*IX-1
 I2=2*IY-1
 IF(IY.EQ.10) I2=9

PRINT 1000,T(I1),T(I1+1),T(I2),T(I2+1),T(ITG),T(ITG+1),T(ITG+2),
 1 T(ITG+3),NUM

PRINT 1008, NP
 REF=0.
 IF(IY.NE.10) GO TO 25
 REF=-CELL(NUM,10)
 25 CONTINUE
 DO 7 I=1,NP
 7 Y(I)=Y(I)+REF
 GOTO27

THIS SECTION PROCESSES THE SUM

41 ICOUNT=ICOUNT+1
 IF(IY.EQ.10) GO TO 38
 ISYM=0
 39 IF((MIDIND+ISYM).GT.121.OR.(MIDIND-ISYM).LT.1) GO TO 38
 A=SUM(MIDIND+ISYM)+SUM(MIDIND-ISYM)
 SUM(MIDIND+ISYM)=A
 SUM(MIDIND-ISYM)=A
 ISYM=ISYM+1
 GO TO 39

38 YMAX=0.
 YMIN=0.
 CALL MIRROR
 RETURN
 ENTRY GRAPH2
 PRINT 999
 IYMA=YMAX/10.
 YMAX=10*(IYMA+1)
 NPP=121
 PRINT 2000,T(I1),T(I1+1),T(ITG),T(ITG+1),T(ITG+2),T(ITG+3),NUM
 GO TO 40

ENTRY GRAPH1
 IENV=1
 ICOUNT=3

```

I1=2*IX-1
PRINT 999
IF(IY.EQ.1) GO TO 23
EM=EMX1
IF(NUM.EQ.2) EM=EMY1
IF(NUM.EQ.3) EM=EML1
PRINT 1011,T(I1),T(I1+1),T(I1+2),T(I1+3),EM
GO TO 29

```

```

23 PRINT 1009,T(I1),T(I1+1)
29 IF(IY.EQ.1) GO TO 27
YSCALE=0.
DO 46 I=1,NP
IF(Y(I).GT.YSCALE) YSCALE=Y(I)
46 CONTINUE
YMA=YSCALE

```

```

C
C COMMON SECTION
27 XMIN=XMI
XMAX=XMA
YMIN=YMI
YMAX=YMA
NPP=NP
40 CONTINUE
KK=6
IF(ABS(YMIN).GT.YMAX) YMAX=ABS(YMIN)
YINT=YMAX*.2
XINT=(XMAX-XMIN)/6.
IF(XMAX*XMIN.GE.0.) GO TO 20
II=(XMIN/XINT)*1.001
XMIN=FLOAT(II)*XINT
XMAX=XMIN+6.*XINT
20 RANGEX=XMAX-XMIN
DO 2 I=1,7
I3=I-1/7
YYY(I3)=FLOAT(6-I3)*YINT
2 XXX(I)=FLOAT(I-1)*XINT+XMIN
MIDIND=INT((-XMIN/RANGEX)*120+1.5)
PRINT 1001,(XXX(I),I=1,7)
IF(YMAX.LE.0.0.OR.YMIN.GE.0.0) KK=12
IF(YMAX.LE.0.0) GO TO 21

```

```

C
C SECTION 1 COMB DOWN
DO 3 JX=1,5
DO 4 J=1,121
4 XCHARA(1,J)=1.
DO 5 I=2,KK
DO 5 J=1,121
5 XCHARA(I,J)=2.
DO 6 I=2,KK
DO 6 J=1,121,20
6 XCHARA(I,J)=1.
DO 33 M=1,121
DO 33 N=1,KK
IF(XCHARA(N,M).GT.2.) SUM(M)=SUM(M)+XCHARA(N,M)-2.
33 CONTINUE
DO 8 I=1,NPP
IF(X(I).LT.XMIN.OR.X(I).GT.XMAX.OR.Y(I).LT.YMIN.OR.Y(I).GT.YMAX) G

```

```

1T08
  IF(Y(I).LE.0.0) GO TO 8
  IF(ABS(Y(I)).GT.YYY(JX)+YINT/(2.*FLOAT(KK))) GO TO 8
  IF(ABS(Y(I)).LE.YYY(JX+1)+YINT/(2.*FLOAT(KK))) GO TO 8
  N=INT(((YYY(JX)-ABS(Y(I)))/YINT)*FLOAT(KK)+1.5)
  M=INT(((X(I)-XMIN)/RANGEX)*120.+1.5)
  IF(XCHARA(N,M).EQ.1.)XCHARA(N,M)=2.
  XCHARA(N,M)=XCHARA(N,M)+1.
8 CONTINUE
  DO 28 N=1,KK
  DO 28 M=1,121
    IF(IENV.EQ.1.AND.XCHARA(N,M).GT.3.)XCHARA(N,M)=42.
28 CONTINUE
  DO 9 N=1,KK
  DO 9 M=1,121
    II=XCHARA(N,M)
    IF(II.GT.60) II=60
  9 XCHARA(N,M)=SYMBOL(II)
    IF(ICOUNT.EQ.2)GOTO44
    PRINT1004,YYY(JX)
    GOTO45
44 PRINT 1010,YYY(JX)
45 PRINT 1005,((XCHARA(N,M),M=1,121),N=1,KK)
  3 CONTINUE
C
C SECTION 2 DOTTED LINE
21 DO 10 M=1,121
10 XCHARA(1,M)=1.
  DO 11 I=1,NPP
    IF(X(I).LT.XMIN.OR.X(I).GT.XMAX)GOTO11
    IF(ABS(Y(I)).GT.YINT/(FLOAT(KK)*2.))GOTO11
    M=INT(((X(I)-XMIN)/RANGEX)*120.+1.5)
    IF(XCHARA(1,M).EQ.1.)XCHARA(1,M)=2.
    XCHARA(1,M)=XCHARA(1,M)+1.
11 CONTINUE
  DO 34 M=1,121
    IF(XCHARA(1,M).GT.2.)SUM(M)=SUM(M)+XCHARA(1,M)-2.
34 CONTINUE
  DO 12 M=1,121
    II=XCHARA(1,M)
    IF(II.GT.60) II=60
  12 XCHARA(1,M)=SYMBOL(II)
    PRINT 1006,(XCHARA(1,M),M=1,121)
    IF(YMIN.GE.0.) GO TO 22
C
C SECTION 3 COMB UP
  DO 13 I=1,6
13 YYY(I)=FLOAT(I-1)*YINT
  DO 14 JX=1,5
  DO 15 J=1,121
15 XCHARA(KK,J)=1.
    KK1=KK-1
  DO 16 I=1,KK1
  DO 16 J=1,121
16 XCHARA(I,J)=2.
  DO 17 I=1,KK1
  DO 17 J=1,121,20

```

```

17 XCHARA(I,J)=1.
   DO 36 M=1,121
   DO 36 N=1,KK
   IF(XCHARA(N,M).GT.2.)SUM(M)=SUM(M)+XCHARA(N,M)-2.
36 CONTINUE
   DO 18 I=1,NPP
   IF(X(I).LT.XMIN.OR.X(I).GT.XMAX.OR.Y(I).LT.YMIN.OR.Y(I).GT.YMAX)GO
1TO18
   IF(Y(I).GE.0.0) GO TO 18
   IF(ABS(Y(I)).GT.YYY(JX+1)+YINT/(2.*FLOAT(KK))) GO TO 18
   IF(ABS(Y(I)).LE.YYY(JX)+YINT/(2.*FLOAT(KK))) GO TO 18
   N=INT(((ABS(Y(I))-YYY(JX))/YINT)*FLOAT(KK)+0.5)
   M=INT(((X(I)-XMIN)/RANGEX)*120.+1.5)
   IF(XCHARA(N,M).EQ.1.)XCHARA(N,M)=2.
   XCHARA(N,M)=XCHARA(N,M)+1.
18 CONTINUE
   DO 19 N=1,KK
   DO 19 M=1,121
   II=XCHARA(N,M)
   IF(II.GT.60) II=60
19 XCHARA(N,M)=SYMBOL(II)
   YPRINT=-YYY(JX+1)
   PRINT 1007,((XCHARA(N,M),M=1,121),N=1,KK1)
   PRINT 1004,YPRINT
   PRINT 1007, (XCHARA(KK,M),M=1,121)
14 CONTINUE
22 CONTINUE
   IF(ICOUNT.GE.2) GO TO 42
   IF(IY.NE.10) GO TO 41
   DO 43 I=1,NP
43 Y(I)=Y(I)-REF
   GO TO 41
42 RETURN
C
999 FORMAT(1H1)
1000 FORMAT(1H+,5X,11HPROJECTION ,4A1,1X,8H IN THE ,4A1,I3)
1001 FORMAT(6H V-AX.,F6.3,6(14X,F6.3)/)
1004 FORMAT(1H+,F7.3,2X)
1005 FORMAT(1H+,7X,121A1/)
1006 FORMAT(1H+,7H H-AXIS,121A1/)
1007 FORMAT(1H+,7X,121A1/)
1008 FORMAT(1H+,50X,*NUMBER OF PARTICLES PLOTTED*,I5)
1009 FORMAT(5X,*GRAPHICAL OUTPUT OF *,2A1,* ENVELOPE VS. CELL NUMBER*)
1010 FORMAT(1H+,F7.0,2X)
1011 FORMAT(5X,*NORMALIZED *,4A1,* EMITTANCE VS. CELL NUMBER - INITIAL
1VALUE =*,E10.3)
2000 FORMAT(5X,13HBEAM PROFILE ,2A1,1X,8H IN THE ,4A1,I3)
END

```

SUBROUTINE GENLIN

THIS PROGRAM DESIGNS A LINAC FOR A GIVEN PHASE LAW.

```

DIMENSION CELL(100,43),E(100,4),PH(101),XPRINT(100),YPRINT(100),
1ZPRINT(100),QUAD(100,5)
COMMON /COM1/CELL/COM2/E/COM3/QUAD
COMMON/COM7/FREQ,C02PF,COUR,IMAX1
REAL LAMBDA, K0, L, L1L2
PI=3.1415927
RESTEN=938.232
CLIGHT=2.997929E+8

DO 7 I=1,100
DO 7 J=1,43
7 CELL(I,J)=0.

```

*** INTRODUCTION OF DATA.

```

READ 100, CELL(1,10),FREQ,IMAX
FR=FREQ/1000000.
READ 101, (CELL(I,3),CELL(I,4),CELL(I,5),CELL(I,6),CELL(I,7),
1CELL(I,8),CELL(I,9),CELL(I,11), CELL(I,31),CELL(I,39),
2CELL(I,40),CELL(I,41),CELL(I,42),CELL(I,43),I=1,IMAX)
READ 103, (E(I,1),I=1,IMAX)
READ 102, (PH(I),I=1,IMAX)

```

*** PRINT OUT OF DATA.

```

PRINT 200
PRINT 201
PRINT 203
PRINT 204, (I,CELL(I,3),CELL(I,4),CELL(I,5),CELL(I,6),CELL(I,7),
1CELL(I,8),CELL(I,9),CELL(I,11),I=1,IMAX)
PRINT 210
PRINT 211, (I, CELL(I,31),CELL(I,39),CELL(I,40),CELL(I,41
1),CELL(I,42),CELL(I,43),I=1,IMAX)
PRINT 205
PRINT 206, (I,E(I,1),PH(I),I=1,IMAX)

```

*** CALCULATION OF REFERENCE PARAMETERS.

```

CE=CELL(1,10)
LAMBDA=CLIGHT/FREQ
K0=6.2831854/LAMBDA
C02PF=1./K0
DO 1 I=1,IMAX
B=CELL(I,11)/LAMBDA
B2=B*B
B3=1.-B2
B4=SQRT(B3)
B5=RESTEN*B2
CELL(I,1)=B5/(B3+B4)
CELL(I,12)=B5/(B3*B4)
1 CELL(I,16)=CELL(I,4)+CELL(I,5)

```

*** CALCULATION OF INPUT PARAMETERS.

C

```

A=CELL(1,10)/RESTEN
BINPUT=SQRT(2.*A+A*A)/(1.+A)
CELL(1,32)=BINPUT/SQRT(1.-BINPUT*BINPUT)
P=3.*PH(1)-3.*PH(2)+PH(3)
PH(IMAX+1)=3.*PH(IMAX)-3.*PH(IMAX-1)+PH(IMAX-2)
DO 2 I=1,IMAX
DKSK1=(CELL(I,1)-CELL(I,10))/CELL(I,12)
L=CELL(I,11)
COSFI = COS (PH(I))
SINFI = SIN(PH(I))
A2=CELL(I,4)*COSFI+CELL(I,8)*SINFI
A3=CELL(I,3)*COSFI+CELL(I,6)*SINFI

```

C

C*** CALCULATION OF CORRECT CELL LENGTH

C

```

3 DV=E(I,1)*L
W=CELL(I,10)+(DV/2.)*(A3+DKSK1*A2)/(1.+(DV/2.)*A2/CELL(I,12))
DKSK=(CELL(I,1)-W)/CELL(I,12)
DFI=(DV/(4.*W))*((CELL(I,4)+DKSK*CELL(I,16))*SINFI-CELL(I,8)*
1(1.+DKSK)*COSFI)
FI1=PH(I)-DFI
CELL(I,26)=(BINPUT/K0)*(PI+FI1-(PH(I)+P)/2.)
FI2=FI1+(DV/(2.*W))*((CELL(I,4)+DKSK*CELL(I,16))*SINFI
CELL(I+1,10)=CELL(I,10)+DV*(CELL(I,3)+DKSK*CELL(I,4))*COSFI
A1=CELL(I+1,10)/RESTEN
BOUT = SQRT (2.*A1+A1*A1)/(1.+A1)
CELL(I,27)=(BOUT/K0)*(PI-FI2+(PH(I+1)+PH(I))/2.)
L1L2=CELL(I,26)+CELL(I,27)
ERROR =ABS(L1L2-L)
L=L1L2
IF (ERROR.GT.0.000001)GOTO3
CELL(I+1,32)=BOUT/SQRT(1.-BOUT*BOUT)
P=PH(I)
YPRINT(I)=BINPUT
ZPRINT(I)=BOUT
BINPUT=BOUT
A9=W/RESTEN
BC=SQRT(2.*A9+A9**2)/(1.+A9)
CELL(I,1)=W
CELL(I,2)=K0/BC
CELL(I,3)=CELL(I,3)+DKSK*CELL(I,4)
CELL(I,4)=CELL(I,4)+DKSK*CELL(I,16)
CELL(I,5)=CELL(I,5)*(1.+DKSK)
CELL(I,6)=CELL(I,6)+DKSK*CELL(I,8)
CELL(I,7)=CELL(I,7)+DKSK*CELL(I,9)
CELL(I,8)=CELL(I,8)+DKSK*(CELL(I,8)+CELL(I,42))
CELL(I,9)=CELL(I,9)+DKSK*(CELL(I,9)+CELL(I,43))
CELL(I,39)=CELL(I,39)+DKSK*CELL(I,40)
CELL(I,40)=CELL(I,40)+DKSK*(CELL(I,40)+CELL(I,41))
CELL(I,28)=L
XPRINT(I)=CELL(I,11) - L

```

C

C*** CALCULATION OF REFERENCE COEFFICIENTS.

C

```

BC2=BC*BC
B3=1.-BC2

```

```

B4=SQRT(B3)
CELL(I,12)=(RESTEN*BC2)/(B3*B4)
B7=B3/2.
B8=B7/CELL(I,2)
B9=B3*CELL(I,2)
B10=B9*CELL(I,2)
B11=CELL(I,3)+CELL(I,4)/2.
CELL(I,14)=(CELL(I,3)+CELL(I,4))*B7
CELL(I,15)=B11*B10/2.
CELL(I,16)=CELL(I,4)+CELL(I,5)
CELL(I,17)=(CELL(I,3)+5.*CELL(I,4)/4.+CELL(I,5)/4.)*B10
CELL(I,18)=(CELL(I,3)+2.*CELL(I,4)+CELL(I,5)/2.)*B9
CELL(I,19)=(CELL(I,3)+5.*CELL(I,4)+7.*CELL(I,5)/2.)*B9
CELL(I,20)=(2.*CELL(I,4)+CELL(I,5))*B8
CELL(I,21)=2.*CELL(I,7)/CELL(I,2)
CELL(I,22)=CELL(I,2)*CELL(I,3)*B7
CELL(I,23)=B11*B9
CELL(I,24)=B10/4.
CELL(I,25)=3.*CELL(I,5)*B8
CELL(I,35)=CELL(I,26)*(2./LAMBDA)
CELL(I,36)=CELL(I,27)*(2./LAMBDA)
2 CELL(I,37)=BC
PRINT 200
PRINT 202,CE,FR,IMAX
PRINT 208
PRINT 209,(I,CELL(I,28),XPRINT(I),CELL(I,1),CELL(I,3),CELL(I+1,10)
I,YPRINT(I),ZPRINT(I),I=1,IMAX)
C
C*** RUNNING PARAMETERS.
C
IMAX1=IMAX+1
COVEO=(CLIGHT/RESTEN)*1.E-06
READ 103,(E(I,2),I=1,IMAX)
READ 216,(CELL(I,30),I=1,IMAX1)
READ 217,(QUAD(I,1),I=1,IMAX1)
READ 218,(CELL(I,29),I=1,IMAX1)
CELL(1,11)=CELL(1,28)
PRINT 200
DO 6 J=1,IMAX1
I=J-J/IMAX1
E(I,4)=E(I,2)*CELL(I,28)/2.
E(I,3)=E(I,4)/(2.*CELL(I,1))
ALP2=ABS(QUAD(J,1))*COVEO/CELL(J,32)
QUAD(I,2)=2.*ALP2*CELL(I,28)*CELL(I,30)
QUAD(I,3)=PI*CELL(I,28)*E(I,2)*CELL(I,3)*SIN(PH(I))/CELL(I,12)
PRINT 206,I,QUAD(I,2),QUAD(I,3)
QUAD(J,5)=SQRT(ALP2)
QUAD(J,4)=QUAD(J,5)*CELL(J,30)/2.
CELL(I+1,11)=CELL(I,11)+CELL(I+1,28)
CELL(I,33)=CELL(I,26)-CELL(I,30)/2.
6 CELL(I,34)=CELL(I,27)-CELL(I+1,30)/2.
PRINT 200
PRINT 313
N2=0
CELL(IMAX1,29)=CELL(IMAX,29)
DO 5 N1=1,IMAX1
CELL(N1,38)=CELL(N1,29)**2

```

```

N2=N2+1
IF(N2.LE.40) GO TO 4
PRINT 200
PRINT 313
N2=N2-40
4 PRINT 312,N1,CELL(N1,26),CELL(N1,27),CELL(N1,11),E(N1,2),CELL(N1,3
10),QUAD(N1,1),CELL(N1,29)
5 CONTINUE
PRINT 200
RETURN

```

C

```

100 FORMAT(2F15.5,I10)
101 FORMAT(7F10.4,F10.6/1F10.6,5F10.4)
102 FORMAT(8F10.4)
103 FORMAT(8F10.7)
200 FORMAT(1H1)
201 FORMAT(1H,47X,35HDESIGN OF LINAC FOR GIVEN PHASE LAW///59X,
112HLIST OF DATA//)
202 FORMAT(1H,9X,19HINJECTION ENERGY = ,F8.5,4H MEV,18X,12HFREQUENCY
1= ,F10.4,4H MHZ,14X,18HNUMBER OF CELLS = ,I4//)
203 FORMAT(1H,3X,2HNO,8X,1HT,13X,2HT1,12X,2HT2,12X,2HS0,12X,2HS1,11X
1,4HKDS0,10X,4HKDS1,11X,1HL/)
204 FORMAT(1H,I5,8E14.5)
210 FORMAT(//,1H,3X,2HNO,22X,1HG,13X,2HSP,11X,4HKDSP,10X,4HK2S
1P,10X,4HK2S0,10X,4HK2S1/)
211 FORMAT(1H,I5,14X,6F14.5)
205 FORMAT(//,1H,13X,2HNO,8X,12HDESIGN FIELD,11X,9HPHASE LAW/)
206 FORMAT(1H,I15,2F20.6)
207 FORMAT(1H,9X,19HINJECTION ENERGY = ,F8.5,4H MEV,18X,5HDL = ,E16.
18,3H CM)
208 FORMAT(1H,3X,2HNO,4X,4HL- M,12X,5HDL- M,11X,5HW-MEV,8X,1HT,8X,8H
1WOUT-MEV,7X,6HBINPUT,7X,4HBOUT/)
209 FORMAT(1H,I5,F10.7,E20.8,F12.6,F12.5,F12.6,2F12.5)
216 FORMAT(10F8.5)
217 FORMAT(8F10.5)
218 FORMAT(10F8.6)
312 FORMAT(1H,I5,F10.7,6F15.7)
313 FORMAT(//9X,2HL1,17X,2HL2,11X,4HLCUM,8X,2HEE,17X,2HLQ,7X,9HQUAD
1GRAD,8X,7HDT BORE/)
END

```

```

SUB ROUTINE QG( I)
DIMENSION CELL(100,43),QUAD(100,5),CORD(      20),COEF(2,3)
COMMON /COM1/CELL/COM3/QUAD/COM4/CORD
COMMON/COM7/FREQ,CO2PF,COUR,IMAX1
PI=3.1415927
CORAL=SQRT(CELL(I,32)/CORD( 9))
AL=QUAD(I,5)*CORAL
ALLQ=QUAD(I,4)*CORAL
COEF(1,1)=COS(ALLQ)
A1=SIN(ALLQ)
COEF(1,2)=A1/AL
COEF(1,3)=-A1*AL
COEF(2,1)=(EXP(ALLQ)+EXP(-ALLQ))*0.5
A2=(EXP(ALLQ)-EXP(-ALLQ))*0.5
COEF(2,2)=A2/AL
COEF(2,3)=A2*AL
CORD( 6)=CORD( 6)+(CELL(I,35)/CORD( 7)-1.)*PI
J=1
IF(QUAD(I,1).GT.0.) GO TO 1
J=2
1 CORD( 11)=CORD( 1)*COEF(J,1)+CORD( 2)*COEF(J,2)
  CORD( 2) =CORD( 1)*COEF(J,3)+CORD( 2)*COEF(J,1)
  J=3-J
  CORD( 13)=CORD( 3)*COEF(J,1)+CORD( 4)*COEF(J,2)
  CORD( 4) =CORD( 3)*COEF(J,3)+CORD( 4)*COEF(J,1)
  CORD( 1)=CORD( 11)+CORD( 2) *CELL(I,33)
  CORD( 3)=CORD( 13)+CORD( 4) *CELL(I,33)
RETURN
END

```

SUBROUTINE DG1(I)

DIMENSION CELL(100,43),E(100,4),CORD(20)

COMMON /COM1/CELL/COM2/E/COM4/CORD

COMMON/COM7/FREQ,C02PF,COUR,IMAX1

RESTEN=938.232

FAK =1./CELL(I,2)

C=COS(CORD(6))

S=SIN(CORD(6))

A1=CELL(I,14)*C-FAK*CELL(I,40)*S

A2=FAK*(CELL(I,5)*0.5*S+(FAK*CELL(I,41)+CELL(I,8))*C)

A3=0.5*(CELL(I,4)-CELL(I,3))*C-(FAK*CELL(I,40)+CELL(I,6))*S

A4=0.5*CELL(I,2)*CELL(I,3)*S+CELL(I,39)*C

CORD(11)=CORD(1)-E(I,3)*(A1*CORD(1)+A2*CORD(2))

CORD(12)=CORD(2)+E(I,3)*(A3*CORD(2)-A4*CORD(1))

CORD(13)=CORD(3)-E(I,3)*(A1*CORD(3)+A2*CORD(4))

CORD(14)=CORD(4)+E(I,3)*(A3*CORD(4)-A4*CORD(3))

R2=CORD(11)**2+CORD(13)**2

CORD(18) =CELL(I,4)+R2*CELL(I,15)

CORD(17) =CELL(I,16)+R2*CELL(I,17)

CORD(20) =CORD(11)*CORD(12)+CORD(13)*CORD(14)

A1=CELL(I,8)+R2*CELL(I,9)

W=CORD(5)

DO 1 J=1,2

CW=CELL(I,1)/W

DKSK=(CELL(I,1)-W)/CELL(I,12)

EPS=E(I,3)*CW

B1=CORD(18)+DKSK*CORD(17)

B2= (CELL(I,18)+DKSK*CELL(I,19))*CORD(20)+(1.+DKSK)*A1

CORD(16)=CORD(6)+EPS*(B1*S-B2*C)

C=COS(CORD(16))

S=SIN(CORD(16))

A2=CORD(18) *C+(CELL(I,18)*CORD(20)+A1)*S

CORD(19) =CELL(I,3)*(1.+R2*CELL(I,24))

A3=CORD(19) *C+(CELL(I,23)*CORD(20)+CELL(I,6)+R2*CELL(I,7))*S

CORD(15)=CORD(5)+E(I,4)*(A3+DKSK*A2)

W=CORD(15)

1 CONTINUE

CORD(10)=CORD(15)-CELL(I,1)

A4=CORD(15)/RESTEN

A5=SQRT(2.*A4+A4**2)

CORD(9)=A5

CORD(7)=CORD(9)/(A4+1.)

CORD(8)=CORD(16)*C02PF*CORD(7)*(-1.)

RETURN

END

SUBROUTINE DG2(I)

DIMENSION CELL(100,43),E(100,4),CORD(20)
 COMMON /COM1/CELL/COM2/E/COM4/CORD
 COMMON/COM7/FREQ,CC2PF,COUR,IMAX1

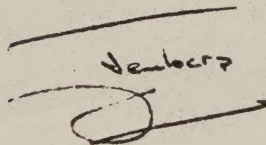
R2=CORD(11)**2+CCPD(13)**2
 RESTE1=938.232
 C=COS(CORD(16))
 S=SIN(CORD(16))
 DKSK=-CORD(10)/CELL(I,12)
 DK=DKSK*CELL(I,2)
 A1=(CELL(I,14)+DK*CELL(I,20))*C
 A2=(CELL(I,5)/CELL(I,2))*(1.+DKSK)*S*0.5
 A3=(CELL(I,22)+DK *CELL(I,14))*S
 A4=(CELL(I,4)-CELL(I,3)+DKSK*CELL(I,5))*C*0.5
 A7=E(I,4)/CPD(15)
 CORD(1)=CORD(1)-A7*(A1*CORD(11)+A2*CORD(12))
 CORD(2)=CORD(2)-A7*(A3*CORD(11)-A4*CORD(12))
 CORD(3)=CORD(3)-A7*(A1*CORD(13)+A2*CORD(14))
 CORD(4)=CORD(4)-A7*(A3*CORD(13)-A4*CORD(14))
 CORD(5)=CORD(5)+2.*E(I,4)*((CORD(19)+DKSK*CORD(18))*C
 1 +CORD(20)*(CELL(I,23)+DKSK*CELL(I,18))*S)
 CORD(6)=CORD(6)+A7*((CORD(18)+DKSK*CORD(17))*S-CORD(20)
 1 *(CELL(I,18)+DKSK*CELL(I,19))*C)
 A4=CORD(5)/RESTE1
 A5=SQRT(2.*A4+A4**2)
 CORD(9)=A5
 CORD(7)=CORD(9)/(A4+1.)
 RETURN
 END

```

SUB ROUTINE GQ( I)
DIMENSION CELL(100,43),E(100,4),CORD( 20),COEF(2,3),QUAD(100,5)
COMMON /COM1/CELL/COM3/QUAD/COM4/CORD
COMMON/COM7/FREQ,CC2PF,COUR,IMAX1
PI=3.1415927
CORD( 6)=CORD( 6)+(CELL(I-1,36)/CORD( 7)-1.)*PI
CORD( 8)=CORD( 6)*CO2PF*CORD( 7)*(-1.)
CORD( 10)=CORD( 5)-CELL(I,10)
CORD( 11)=CORD( 1)+CORD( 2)*CELL(I-1,34)
CORD( 13)=CORD( 3)+CORD( 4)*CELL(I-1,34)
IF(CELL(I,30).EQ.0.) GO TO 2
CORAL=SQRT(CELL(I ,32)/CORD( 9))
AL=QUAD(I,5)*CORAL
ALLQ=QUAD(I,4)*CORAL
IF(I.EQ.IMAX1) ALLQ=ALLQ*2.
COEF(1,1)=COS(ALLQ)
A1=SIN(ALLQ)
COEF(1,2)=A1/AL
COEF(1,3)=-A1*AL
COEF(2,1)=(EXP(ALLQ)+EXP(-ALLQ))*0.5
A2=(EXP(ALLQ)-EXP(-ALLQ))*0.5
COEF(2,2)=A2/AL
COEF(2,3)=A2*AL
J=1
IF(QUAD(I,1).GT.0.) GO TO 1
J=2
1 CORD( 1)=CORD( 11)*COEF(J,1)+CORD( 2)*COEF(J,2)
  CORD( 2)=CORD( 11)*COEF(J,3)+CORD( 2)*COEF(J,1)
  J=3-J
  CORD( 3)=CORD( 13)*COEF(J,1)+CORD( 4)*COEF(J,2)
  CORD( 4)=CORD( 13)*COEF(J,3)+CORD( 4)*COEF(J,1)
  RETURN
2 CORD( 1)=CORD( 11)
  CORD( 3)=CORD( 13)
  RETURN
END

```

Vu et approuvé
Orsay, le 8 avril 1971
Le Vice-Président du Centre d'Orsay

A handwritten signature in black ink, consisting of a horizontal line, the word "Denbarr" written in a cursive script, and a large, stylized loop below it.

